UNIDAD III

UNIDAD IV

Unidad III

TEORIA DE PEQUEÑAS MUESTRAS O TEORIA EXACTA DEL MUESTREO

En las unidades anteriores se manejó el uso de la distribución z, la cual se podía utilizar siempre y cuando los tamaños de las muestras fueran mayores o iguales a 30 ó en muestras más pequeñas si la distribución o las distribuciones de donde proviene la muestra o las muestras son normales.

En esta unidad se podrán utilizar muestras pequeñas siempre y cuando la distribución de donde proviene la muestra tenga un comportamiento normal. Esta es una condición para utilizar las tres distribuciones que se manejarán en esta unidad; t de student, X^2 ji-cuadrada y Fisher.

A la teoría de pequeñas muestras también se le llama teoría exacta del muestreo, ya que también la podemos utilizar con muestras aleatorias de tamaño grande.

En esta unidad se verá un nuevo concepto necesario para poder utilizar a las tres distribuciones mencionadas. Este concepto es "***grados de libertad***".

Para definir grados de libertad se hará referencia a la varianza muestral:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Esta fórmula está basada en *n-1* ***grados de libertad*** (degrees of freedom). Esta terminología resulta del hecho de que si bien s^2 está basada en *n* cantidades $x_1 - \bar{x},\ x_2 - \bar{x},\ \ldots,\ x_n - \bar{x},$ éstas suman cero, así que especificar los valores de cualquier *n-1* de las cantidades determina el valor restante. Por ejemplo, si *n=4 y* $x_1 - \bar{x} = 8$; $x_2 - \bar{x} = -6$ y $x_4 - \bar{x} = -4$, entonces automáticamente tenemos $x_3 - \bar{x} = 2$, así que sólo tres de los cuatro valores de $x_i - \bar{x}$ están libremente determinamos 3 grados de libertad.

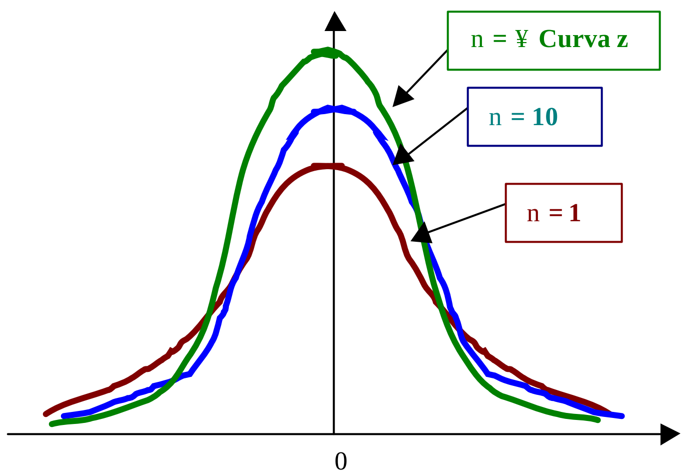
Entonces, en esta unidad la fórmula de grados de libertad será *n-1* y su simbología ν = nu.

DISTRIBUCION "t DE STUDENT"

Supóngase que se toma una muestra de una población normal con media μ y varianza σ^2. Si $\bar{x}$ es el promedio de las *n* observaciones que contiene la muestra aleatoria, entonces la distribución $z = \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}}$ es una distribución normal estándar.

Supóngase que la varianza de la población σ^2 es desconocida. ¿Qué sucede con la distribución de esta estadística si se reemplaza σ por s? La distribución *t* proporciona la respuesta a esta pregunta.

La media y la varianza de la distribución t son $\mu = 0$ y $s^2 = u/(u-2)$ para ν>2, respectivamente.
La siguiente figura presenta la gráfica de varias distribuciones *t*. La apariencia general de la distribución *t* es similar a la de la distribución normal estándar: ambas son simétricas y unimodales, y el valor máximo de la ordenada se alcanza en la media $\mu = 0$. Sin embargo, la distribución *t* tiene colas más amplias que la normal; esto es, la probabilidad de las colas es mayor que en la distribución normal. A medida que el número de grados de libertad tiende a infinito, la forma límite de la distribución *t* es la distribución normal estándar.



Propiedades de las distribuciones t

1. Cada curva t tiene forma de campana con centro en 0.
2. Cada curva t, está más dispersa que la curva normal estándar z.
3. A medida que ν aumenta, la dispersión de la curva t correspondiente disminuye.
4. A medida que $\nu \to \infty$, la secuencia de curvas t se aproxima a la curva normal estándar, por lo que la curva z recibe a veces el nombre de curva t con gl = ∞

La distribución de la variable aleatoria t está dada por:

$$h(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)\sqrt{pu}}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, -\infty < t < \infty.$$

Esta se conoce como la **distribución t** con ν grados de libertad.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes que son todas normales con media μ y desviación estándar σ. Entonces la variable aleatoria $t = \dfrac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}}$

tiene una distribución t con ν = n-1 grados de libertad.

La distribución de probabilidad de t se publicó por primera vez en 1908 en un artículo de W. S. Gosset. En esa época, Gosset era empleado de una cervecería irlandesa que desaprobaba la publicación de investigaciones de sus empleados. Para evadir esta prohibición, publicó su trabajo en secreto bajo el nombre de “Student”. En consecuencia, la distribución t normalmente se llama distribución *t de Student*, o simplemente distribución t. Para derivar la ecuación de esta distribución, Gosset supone que las muestras se seleccionan de una población normal. Aunque esto parecería una suposición muy restrictiva, se puede mostrar que las poblaciones no normales que poseen distribuciones en forma casi de campana aún proporcionan valores de t que se aproximan muy de cerca a la distribución t.

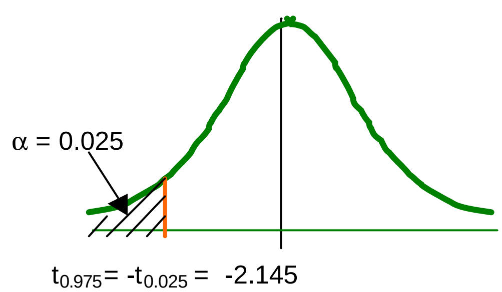
La distribución t difiere de la de Z en que la varianza de t depende del tamaño de la muestra y siempre es mayor a uno. Unicamente cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito las dos distribuciones serán las mismas.

Se acostumbra representar con t_{α} el valor t por arriba del cual se encuentra un área igual a α. Como la distribución t es simétrica alrededor de una media de cero, tenemos $t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$; es decir, el valor t que deja un área de $1-\alpha$ a la derecha y por tanto un área de α a la izquierda, es igual al valor t negativo que deja un área de α en la cola derecha de la distribución. Esto es, $t_{0.95} = -t_{0.05}$, $t_{0.99}=-t_{0.01}$, etc.

Para encontrar los valores de t se utilizará la tabla de valores críticos de la distribución t del libro Probabilidad y Estadística para Ingenieros de los autores Walpole, Myers y Myers.

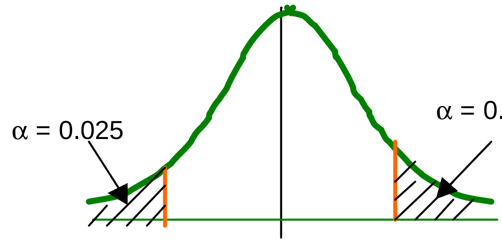
Ejemplo:
El valor t con ν = 14 grados de libertad que deja un área de 0.025 a la izquierda, y por tanto un área de 0.975 a la derecha, es

$$t_{0.975}=-t_{0.025} = -2.145$$



Si se observa la tabla, el área sombreada de la curva es de la cola derecha, es por esto que se tiene que hacer la resta de $1-\alpha$. La manera de encontrar el valor de t es buscar el valor de α en el primer renglón de la tabla y luego buscar los grados de libertad en la primer columna y donde se intercepten α y ν se obtendrá el valor de t.

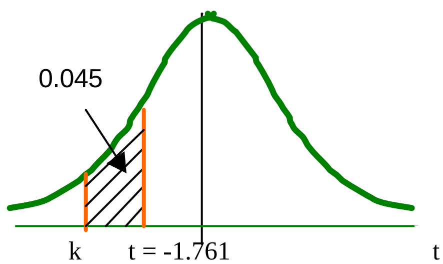
Ejemplo:
Encuentre la probabilidad de $-t_{0.025} < t < t_{0.05}$.
Solución:



Como $t_{0.05}$ deja un área de 0.05 a la derecha, y $-t_{0.025}$ deja un área de 0.025 a la izquierda, encontramos un área total de 1-0.05-0.025 = 0.925.

$$P(-t_{0.025} < t < t_{0.05}) = 0.925$$

Ejemplo:
Encuentre k tal que P(k < t < -1.761) = 0.045, para una muestra aleatoria de tamaño 15 que se selecciona de una distribución normal.
Solución:



Si se busca en la tabla el valor de t =1.761 con 14 grados de libertad nos damos cuenta que a este valor le corresponde un área de 0.05 a la izquierda, por ser negativo el valor. Entonces si se resta 0.05 y 0.045 se tiene un valor de 0.005, que equivale a α. Luego se busca el valor de 0.005 en el primer renglón con 14 grados de libertad y se obtiene un valor de t = 2.977, pero como el valor de α está en el extremo izquierdo de la curva entonces la respuesta es t = -2.977 por lo tanto:

$$P(-2.977 < t < -1.761) = 0.045$$

Ejemplo:
Un ingeniero químico afirma que el rendimiento medio de la población de cierto proceso en lotes es 500 gramos por milímetro de materia prima. Para verificar esta afirmación toma una muestra de 25 lotes cada mes. Si el valor de t calculado cae entre $-t_{0.05}$ y $t_{0.05}$, queda satisfecho con su afirmación. ¿Qué conclusión extraería de una muestra que tiene una media de 518 gramos por milímetro y una desviación estándar de 40 gramos? Suponga que la distribución de rendimientos es aproximadamente normal.

Solución:

De la tabla encontramos que $t_{0.05}$ para 24 grados de libertad es de 1.711. Por tanto, el fabricante queda satisfecho con esta afirmación si una muestra de 25 lotes rinde un valor t entre –1.711 y 1.711.
Se procede a calcular el valor de t:

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{518 - 500}{40/\sqrt{25}} = 2.25$$

Este es un valor muy por arriba de 1.711. Si se desea obtener la probabilidad de obtener un valor de t con 24 grados de libertad igual o mayor a 2.25 se busca en la tabla y es aproximadamente de 0.02. De aquí que es probable que el fabricante concluya que el proceso produce un mejor producto del que piensa.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA m; CON s DESCONOCIDA

Si $\bar{x}$ y s son la media y la desviación estándar de una muestra aleatoria de una población normal con varianza σ^2, desconocida, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para μ es:

$$\boxed{\bar{x} - t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

donde $t_{\alpha/2}$ es el valor t con ν = n-1 grados de libertad, que deja un área de $\alpha/2$ a la derecha.

Se hace una distinción entre los casos de σ conocida y σ desconocida al calcular las estimaciones del intervalo de confianza. Se debe enfatizar que para el primer caso se utiliza el teorema del límite central, mientras que para σ desconocida se hace uso de la distribución muestral de la variable aleatoria t. Sin embargo, el uso de la distribución t se basa en la premisa de que el muestreo se realiza de una distribución normal. En tanto que la distribución tenga forma aproximada de campana, los intervalos de confianza se pueden calcular cuando la varianza se desconoce mediante el uso de la distribución t y se puede esperar buenos resultados.

Con mucha frecuencia los estadísticos recomiendan que aun cuando la normalidad no se pueda suponer, con σ desconocida y $n \geq 30$, s puede reemplazar a σ y se puede utilizar el intervalo de confianza:

$$\bar{x} \pm z_{e/2}\, s/\sqrt{n}$$

Por lo general éste se denomina como un *intervalo de confianza de muestra grande*. La justificación yace sólo en la presunción de que con una muestra grande como 30, s estará muy cerca de la σ real y de esta manera el teorema del límite central sigue valiendo. Se debe hacer énfasis en que esto es solo una aproximación y que la calidad de este enfoque mejora a medida que el tamaño de la muestra crece más.

Ejemplos:

1. El contenido de siete contenedores similares de ácido sulfúrico son 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, y 9.6 litros. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la media de todos los contenedores si se supone una distribución aproximadamente normal.

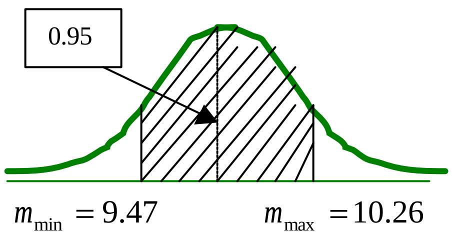
Solución:

La media muestral y la desviación estándar para los datos dados son:

$$\bar{x} = 10 \qquad \text{y} \qquad s = 0.283$$

En la tabla se encuentra que $t_{0.025}$=2.447 con 6 grados de libertad, de aquí, el intervalo de confianza de 95% para μ es:

$$10.0 - (2.477)\left(\frac{0.283}{\sqrt{7}}\right) < \mu < 10.0 + (2.477)\left(\frac{0.283}{\sqrt{7}}\right)$$



Con un nivel de confianza del 95% se sabe que el promedio del contenido de los contenedores está entre 9.47 y 10.26 litros.

2. Un artículo publicado en el *Journal of Testing and Evaluation* presenta las siguientes 20 mediciones del tiempo de combustión residual en segundos de especímenes tratados de ropa de dormir para niños:

9.85	9.93	9.75	9.77	9.67
9.87	9.67	9.94	9.85	9.75
9.83	9.92	9.74	9.99	9.88
9.95	9.95	9.93	9.92	9.89

Se desea encontrar un nivel de confianza del 95% para el tiempo de combustión residual promedio. Supóngase que el tiempo de combustión residual sigue una distribución normal.

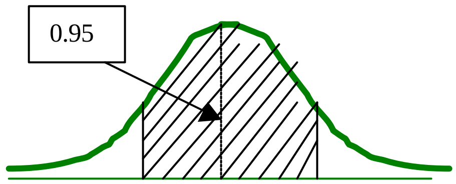
Solución:

La media muestral y la desviación estándar para los datos dados son:

$$\bar{x} = 9.8525 \qquad \text{y} \qquad s = 0.0965$$

En la tabla se encuentra que $t_{0.025}$=2.093 con 19 grados de libertad, de aquí, el intervalo de confianza de 95% para μ es:

$$9.8525 - (2.093)\left(\frac{0.0965}{\sqrt{20}}\right) < \mu < 9.8525 + (2.093)\left(\frac{0.0965}{\sqrt{20}}\right)$$



$$m_{\min} = 9.8073 \qquad m_{\max} = 9.8977$$

Por lo tanto, se tiene una confianza del 95% de que el tiempo de combustión residual promedio se encuentra entre 9.8073 y 9.8977 segundos.

PRUEBA DE HIPOTESIS SOBRE LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL, VARIANZA DESCONOCIDA

Ciertamente sospechamos que las pruebas sobre una media poblacional μ con σ^2 desconocida, debe incluir el uso de la distribución t de Student. La estructura de la prueba es idéntica a la del caso de σ conocida, con la excepción de que el valor σ en la estadística de prueba se reemplaza por la estimación de s calculada y la distribución normal estándar se reemplaza con una distribución t.

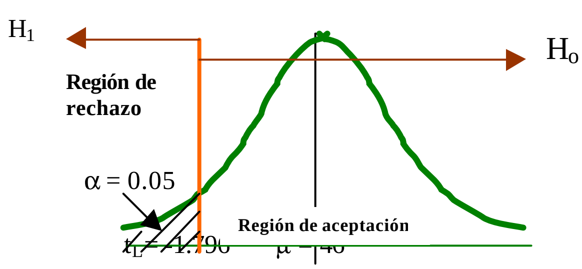
Ejemplos:

1. El *Instituto Eléctrico Edison* publica cifras del número anual de Kilowatt-hora que gastan varios aparatos eléctrodomésticos. Se afirma que una aspiradora gasta un promedio de 46 kilowatt-hora al año. Si una muestra aleatoria de 12 hogares que se incluye en un estudio planeado indica que las aspiradoras gastan un promedio de 42 kilowatt-hora al año con una desviación estándar de11.9 kilowatt-hora, ¿esto sugiere con un nivel de significancia de 0.05 que las aspiradoras gastan, en promedio, menos de 46 kilowatt-hora anualmente? Suponga que la población de kilowatt-hora es normal.

Solución:

1. Datos:
   μ= 46 kilowatt-hora
   s= 11.9 kilowatt-hora
   $\bar{x}$ = 42 kilowatt-hora
   n = 12
   α = 0.05

3. Ensayo de hipótesis
   H_o; μ = 46 kilowatt-hora
   H_1; μ < 46 kilowatt-hora



4. Regla de decisión:
   Si $t_R \geq -1.796$ No se rechaza H_o
   Si $t_R < -1.796$ Se rechaza H_o

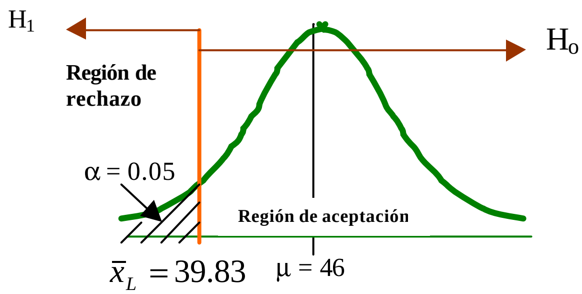
5. Cálculos:

$$t_R = \frac{\bar{x}_R - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{42-46}{11.9/\sqrt{12}} = -1.16$$

6. Justificación y decisión:
   Como –1.16 > -1.796, por lo tanto no se rechaza H_0 y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que el número promedio de kilowwatt-hora que gastan al año las aspiradoras no es significativamente menor que 46.

Solución por el otro método:

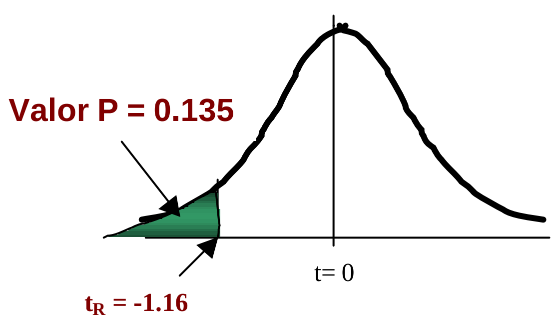
$$\bar{x}_L = m - \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 46 - \frac{(1.796)(11.9)}{\sqrt{12}} = 39.83$$



Regla de decisión:
Si $\bar{x}_R \geq 39.83$ No se Rechaza H_o
Si $\bar{x}_R < 39.83$ Se rechaza H_o

Como la $\bar{x}_R = 42$ y este valor no es menor que 39.83 por lo tanto no se rechaza H_o.

Se puede aprovechar este ejemplo para calcular el valor de P , como el valor de t calculada es de –1.16, se busca en la tabla y se ve que el area a la izquierda de este valor es de 0.135 con 11 grados de libertad, por lo tanto no se rechaza H_o., ya que sería un valor alto para un nivel de significancia.



2. Un artículo publicado en la revista *Materials Engineering* describe los resultados de pruebas de resistencia a la adhesión de 22 especímenes de aleación U-700. La carga para la que cada especímen falla es la siguiente en MPa:

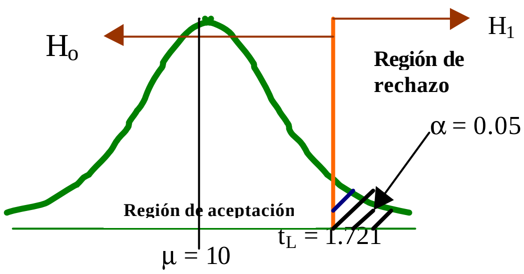
19.8	18.5	17.6	16.7	15.8
15.4	14.1	13.6	11.9	11.4
11.4	8.8	7.5	15.4	15.4
19.5	14.9	12.7	11.9	11.4
10.1	7.9			

¿Sugieren los datos que la carga promedio de falla es mayor que 10Mpa? Supóngase que la carga donde se presenta la falla tiene una distribución normal, y utilicese α = 0.05. Calcule el valor de P.

Solución:

1. Datos:
   μ= 10
   s = 3.55
   $\bar{x}$ = 13.71
   n = 22
   α = 0.05

3. Ensayo de hipótesis
   H_o; μ = 10
   H_1; μ > 10



4. Regla de decisión:
   Si $t_R \leq$ 1.721 no se rechaza H_o.
   Si $t_R >$ 1.721 se rechaza H_o.

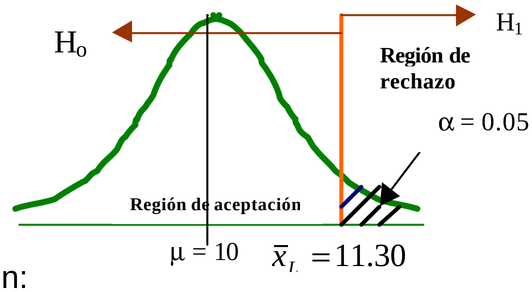
5. Cálculos:

$$t_R = \frac{\bar{x}_R - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{13.71 - 10}{3.55/\sqrt{22}} = 4.90$$

6. Justificación y decisión.
   Como 4.90 >1.721 se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que la carga de falla promedio es mayor que 10Mpa.

Existe otra manera de resolver este ejercicio, tomando la decisión en base al estadístico real, en este caso la media de la muestra. De la fórmula de la distribución muestral de medias se despeja la media de la muestra:

$$t_L = \frac{\bar{x}_L - m}{s/\sqrt{n}} \qquad \bar{x}_L = m + \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 10 + \frac{(1.721)(3.55)}{\sqrt{22}} = 11.30$$



Regla de decisión:

Si $\bar{x}_R \leq 11.30$ No se rechaza H_o

Si $\bar{x}_R > 11.30$ Se rechaza H_o

Como la media de la muestral es de 13.71 MPa y es mayor al valor de la media muestral límite de 11.30 por lo tanto se rechaza H_o y se llega a la misma conclusión.

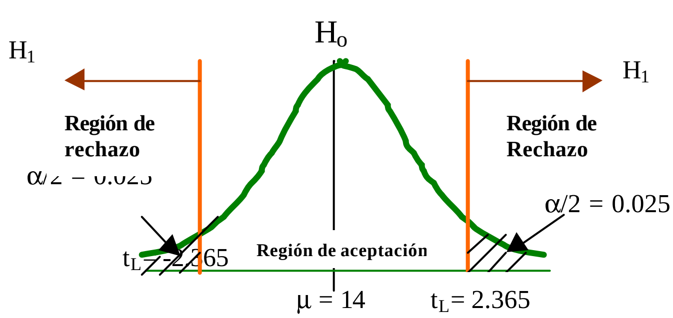
Para calcular el valor de P se va a la tabla y se busca en 21 grados de libertad el valor de t = 4.90. Se obseva que el valor mayor de t que se encuentra en la tabla con 21 grados de libertad es de 3.819 el cual le corresponde un área a la derecha de 0.0005, por lo que para el valor de 4.90 el ***valor de P es practicamente cero***, y esto apoya la decisión de rechazar H_o.

3. Los pesos en libras de una muestra aleatoria de bebés de seis meses son: 14.6, 12.5, 15.3, 16.1, 14.4, 12.9, 13.7 y 14.9. Haga una prueba con nivel de 5% de significancia para determinar si el peso promedio de todos los bebés de seis meses es distinto a 14 libras, suponga que sus pesos se distribuyen normalmente y calcule el valor de P.

Solución:

1. Datos:
   μ= 14 libras
   s = 1.21 libras
   $\bar{x}$ = 14.3 libras
   n = 8
   α = 0.05

2. Ensayo de hipótesis
   H_o; μ = 14 libras
   H_1; $\mu \neq$ 14 libras



3. Regla de Decisión:
   Si $-2.365 \leq t_R \leq 2.365$ No se rechaza H_o

Si $t_R < -2.365$ ó si $t_R > 2.365$ Se rechaza H_o

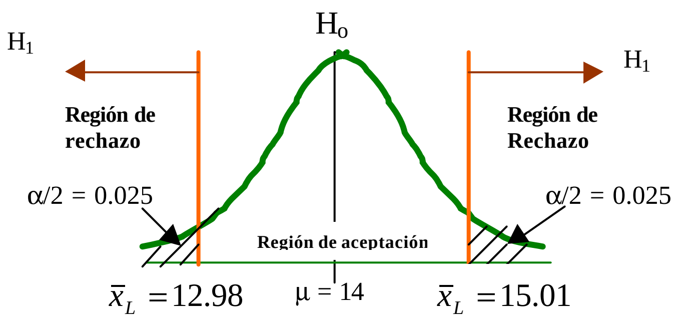
4. Cálculos:

$$t_R = \frac{\bar{x}_R - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.3 - 14}{1.21/\sqrt{8}} = 0.7012$$

5. Justificación y decisión:
   Como $-2.365 \leq$ **0.7012** ≤ 2.365 por lo tanto, no se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que el peso promedio de todos los bebés de seis meses es de 14 libras.

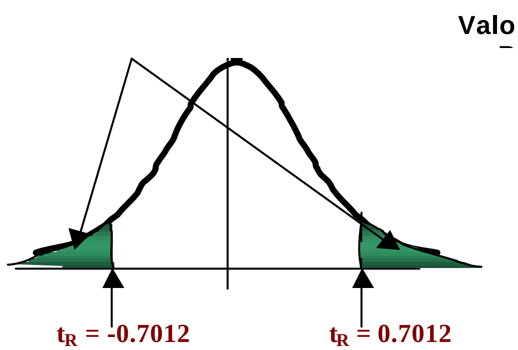
Solución por el otro método:

$$\bar{x}_L = m \pm \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 14 \pm \frac{(2.365)(1.21)}{\sqrt{8}} = \text{ 12.98 y 15.01}$$



Regla de decisión:
Si $12.98 \leq \bar{x}_R \leq 15.01$ No se rechaza H_o
Si $\bar{x}_R < 12.98$ ó $\bar{x}_R > 15.01$ se rechaza H_o

Como la $\bar{x}_R = 14.3$ libras, entonces no se rechaza H_o .
Para calcular el valor de P se busca en la tabla el valor de 0.7012 con 7 grados de libertad. Se obseva que este valor no se encuentra pero se puede interpolar entre los valores de 0.549 y 0.896 con áreas de 0.30 y 0.20 respectivamente. Interpolando linealmente se obtiene el valor de 0.2561.



Error tipo II ó b

El error tipo II se calcula de la misma forma en la que se calculó con la distribución z. Se realizarán algunos ejercicios en los cuales se determinará la probabilidad de cometer el error tipo II, utilizando la tabla de la distribución.

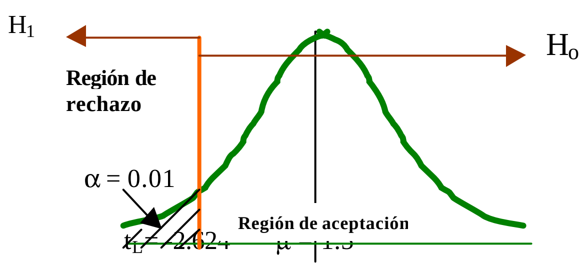
Existen curvas características de operación en los libros con diferentes grados de libertad para determinar los tamaños de muestra correspondientes según el grado de error que se quiera, recordando que entre mayor sea el tamaño de muestra menor será el error.

1. Se sabe que los voltajes de una marca de pilas tamaño C se distribuyen normalmente, se probó una muestra aleatoria de 15 y se encontró que la media es de 1.4 volts con una desviación estándar de 0.21 volts. En el nivel de significancia de 0.01:
   a) ¿Indica esto que la media de los voltajes es menor que 1.5 volts?
   b) Calcular la probabilidad de cometer el error tipo II si el voltaje promedio real de las pilas es de 1.3 volts.

Solución:

3. Datos:
   μ= 1.5 volts.
   s= 0.21 volts
   $\bar{x}$ = 1.4 volts.
   n = 15
   α = 0.01

5. Ensayo de hipótesis
   H_0; μ = 1.5 volts
   H_1; μ < 1.5 volts



6. Regla de decisión:
   Si $t_R \geq$ -2.624 No se rechaza H_o
   Si $t_R <$ -2.624 Se rechaza H_o

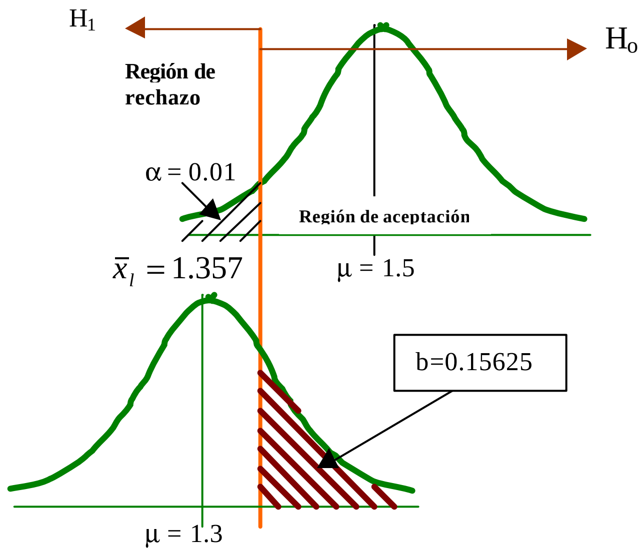
7. Cálculos:

$$t_R = \frac{\bar{x}_R - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.4 - 1.5}{0.21/\sqrt{15}} = -1.84$$

8. Justificación y decisión:
   Como –1.84 > -2.624, por lo tanto no se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.01 que los voltajes de las pilas tamaño C no son menores a 1.5.

Para calcular el error tipo II se tiene que obtener el valor de $\bar{x}_l$ de la siguiente forma:

$$\bar{x}_L = m - \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 1.5 - \frac{(2.624)(0.21)}{\sqrt{15}} = 1.357$$



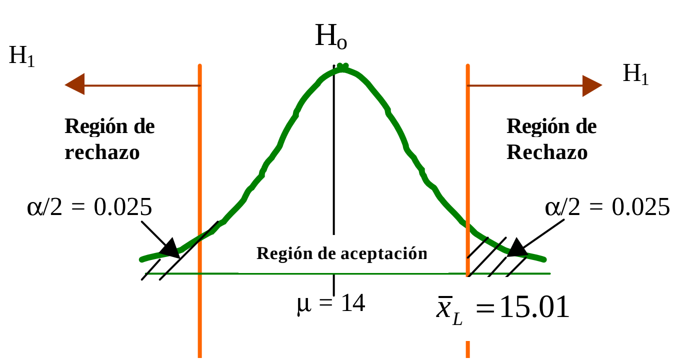
$$t = \frac{1.357 - 1.3}{0.21 / \sqrt{15}} = 1.05$$

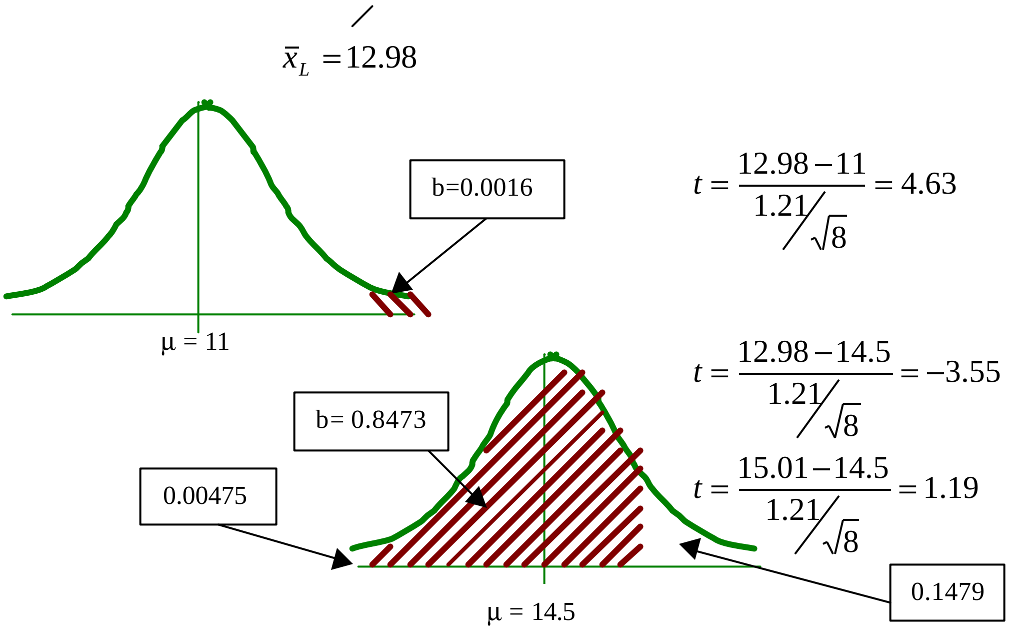
Para encontrar el valor de β se busca en la tabla de la distribución t el valor de 1.05 con 14 grados de libertad. Como este valor no se encuentra en la tabla se interpola entre 0.868 y 1.076 con un área de 0.20 y 0.15 respectivamente. Al interpolar se obtiene un área de 0.15612 y esta es la probabilidad de cometer el error tipoII cuando la media verdadera es de 1.3 volts y un tamaño de muestra de 15.

2. Para el ejercicio del peso de los bebés de 6 meses, calcular el error tipo II, si los pesos verdaderos hubieran sido de 11 y 14.5 libras.

Solución:
Primero se calculan los valores de $\bar{x}_l$:

$$\bar{x}_L = m \pm \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 14 \pm \frac{(2.365)(1.21)}{\sqrt{8}} = 12.98 \text{ y } 15.01$$





$$t = \frac{12.98 - 11}{1.21/\sqrt{8}} = 4.63$$

$$t = \frac{12.98 - 14.5}{1.21/\sqrt{8}} = -3.55$$

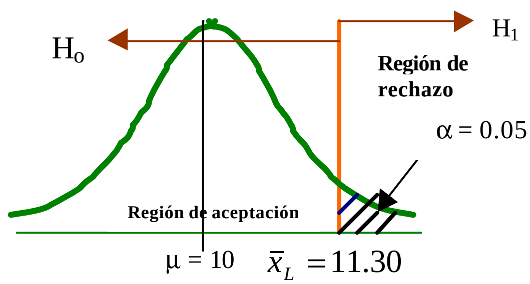
$$t = \frac{15.01 - 14.5}{1.21/\sqrt{8}} = 1.19$$

En este último cálculo para β se tendrá que analizar las áreas de los dos extremos, pues estas no están dentro de la región de aceptación, por lo tanto no se deben de tomar en cuenta para el error tipo II.
Se busca en la tabla el valor de 3.55 con 7 grados de libertad, y al interpolar nos da un área de 0.00475. El área correspondiente a 1.19 con 7 grados de libertad es de 0.1479. Por lo que β=1-(0.00475+0.1479)= 0.8473

3. Para el ejercicio en donde se dan los resultados de pruebas de resistencia a la adhesión de 22 especímenes de aleación U-700., encontrar la probabilidad de cometer el error tipo II si la carga promedio de falla es igual a 11.

Solución:
Primero se obtendrá el valor del estadístico límite:

$$\bar{x}_L = m + \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 10 + \frac{(1.721)(3.55)}{\sqrt{22}} = 11.30$$



$$t = \frac{11.30 - 11}{3.55 / \sqrt{22}} = 0.3963$$

0.35129

DISTRIBUCION JI-CUADRADA (X^2)

En realidad la distribución ji-cuadrada es la distribución muestral de s^2. O sea que si se extraen todas las muestras posibles de una población normal y a cada muestra se le calcula su varianza, se obtendrá la distribución muestral de varianzas.

Para estimar la varianza poblacional o la desviación estándar, se necesita conocer el estadístico X^2. Si se elige una muestra de tamaño *n* de una población normal con varianza σ^2, el estadístico:

$$\frac{(n-1)s^2}{s^2}$$

tiene una distribución muestral que es una **distribución ji-cuadrada** con gl=n-1 **grados de libertad** y se denota X^2 (X es la minúscula de la letra griega ji). El estadístico ji-cuadrada esta dado por:

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{s^2}$$

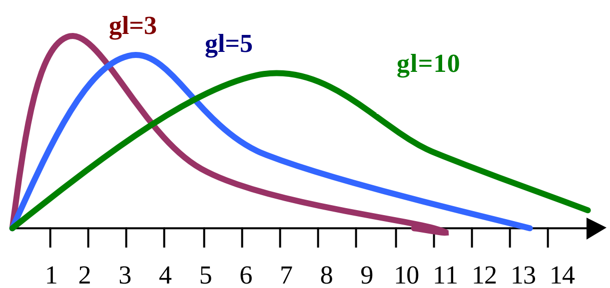
donde *n* es el tamaño de la muestra, s^2 la varianza muestral y σ^2 la varianza de la población de donde se extrajo la muestra. El estadístico ji-cuadrada también se puede dar con la siguiente expresión:

$$X^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{s^2}$$

Propiedades de las distribuciones ji-cuadrada

1. Los valores de X^2 son mayores o iguales que 0.
2. La forma de una distribución X^2 depende del gl=n-1. En consecuencia, hay un número infinito de distribuciones X^2.
3. El área bajo una curva ji-cuadrada y sobre el eje horizontal es 1.
4. Las distribuciones X^2 no son simétricas. Tienen colas estrechas que se extienden a la derecha; esto es, están sesgadas a la derecha.
5. Cuando n>2, la media de una distribución X^2 es n-1 y la varianza es 2(n-1).
6. El valor modal de una distribución X^2 se da en el valor (n-3).

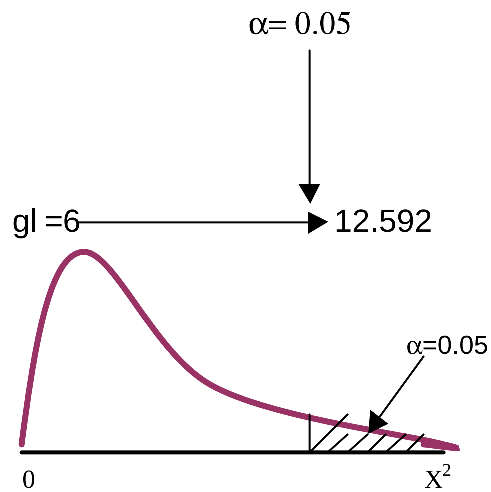
La siguiente figura ilustra tres distribuciones X^2. Note que el valor modal aparece en el valor (n-3) = (gl-2).



La función de densidad de la distribución X^2 esta dada por:

$$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2} \qquad \text{para } x>0$$

La tabla que se utilizará para estos apuntes es la del libro de probabilidad y estadística de Walpole, la cual da valores críticos X^2_α (gl) para veinte valores especiales de α. Para denotar el valor crítico de una distribución X^2 con gl grados de libertad se usa el símbolo X^2_α (gl); este valor crítico determina a su derecha un área de α bajo la curva X^2 y sobre el eje horizontal. Por ejemplo para encontrar $X^2_{0.05}(6)$ en la tabla se localiza 6 gl en el lado izquierdo y $\alpha=0.05$ a o largo del lado superior de la misma tabla.



Cálculo de Probabilidad

El cálculo de probabilidad en una distribución muestral de varianzas nos sirve para saber como se va a comportar la varianza o desviación estándar en una muestra que proviene de una distribución normal.

Ejemplos:

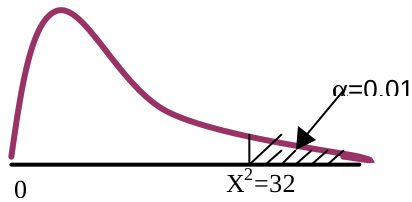
b) Suponga que los tiempos requeridos por un cierto autobús para alcanzar un de sus destinos en una ciudad grande forman una distribución normal con una desviación estándar $\sigma=1$ minuto. Si se elige al azar una muestra de 17 tiempos, encuentre la probabilidad de que la varianza muestral sea mayor que 2.

Solución:

Primero se encontrará el valor de ji-cuadrada correspondiente a $s^2=2$ como sigue:

$$X^2=\frac{(n-1)s^2}{s^2}=\frac{(17-1)(2)}{(1)^2}=32$$

El valor de 32 se busca adentro de la tabla en el renglón de 16 grados de libertad y se encuentra que a este valor le corresponde un área a la derecha de 0.01. En consecuencia, el valor de la probabilidad es P(s^2>2)



b) Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones, de una población normal con varianza σ^2=6, tenga una varianza muestral:
   a) Mayor que 9.1
   b) Entre 3.462 y 10.745

Solución.

a) Primero se procederá a calcular el valor de la ji-cuadrada:

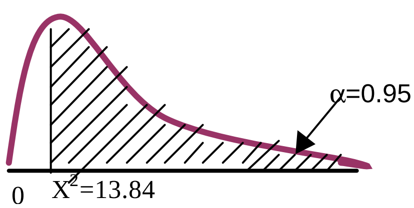
$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{s^2} = \frac{(25-1)(9.1)}{6} = 36.4$$

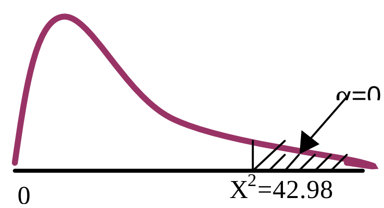
Al buscar este número en el renglón de 24 grados de libertad nos da un área a la derecha de 0.05. Por lo que la P(s^2 >9.1) = 0.05

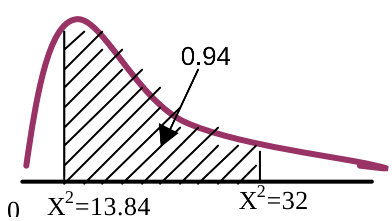
b) Se calcularán dos valores de ji-cuadrada:

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{s^2} = \frac{(25-1)(3.462)}{6} = 13.847 \quad \text{y} \quad X^2 = \frac{(25-1)(10.745)}{6} = 42.98$$

Aquí se tienen que buscar los dos valores en el renglón de 24 grados de libertad. Al buscar el valor de 13.846 se encuentra un área a la derecha de 0.95. El valor de 42.98 da un área a la derecha de 0.01. Como se está pidiendo la probabilidad entre dos valores se resta el área de 0.95 menos 0.01 quedando 0.94.
Por lo tanto la P(3.462 $\leq s^2 \leq$ 10.745) = 0.94







Estimación de la Varianza

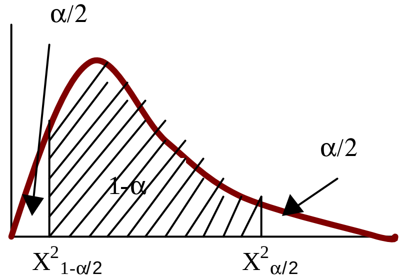
Para poder estimar la varianza de una población normal se utilizará la distribución ji-cuadrada.

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{s^2}$$

Al despejar esta fórmula la varianza poblacional nos queda:

$$s^2 = \frac{(n-1)s^2}{X^2}$$

Los valores de X^2 dependerán de nivel de confianza que se quiera al cual le llamamos 1-α. Si nos ubicamos en la gráfica se tiene:



Ejemplos:

1. Los siguientes son los pesos, en decagramos, de 10 paquetes de semillas de pasto distribuidas por cierta compañía: 46.4, 46.1, 45.8, 47.0, 46.1, 45.9, 45.8, 46.9, 45.2 y 46. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la varianza de todos los paquetes de semillas de pasto que distribuye esta compañía, suponga una población normal.

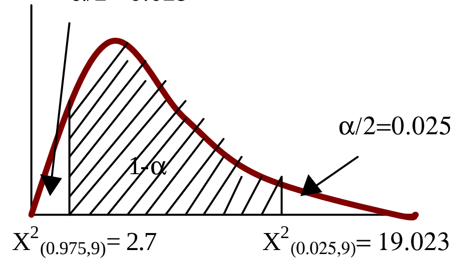
Solución:

Primero se calcula la desviación estándar de la muestra:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(46.4-46.12)^2 + (46.1-46.12)^2 + ... + (46-46.12)^2}{10-1}} = 0.5347$$

al elevar este resultado al cuadrado se obtiene la varianza de la muestra s^2= 0.286.

Para obtener un intervalo de confianza de 95% se elige un α= 0.05. Despues con el uso de la tabla con 9 grados de libertad se obtienen los valores de X^2.



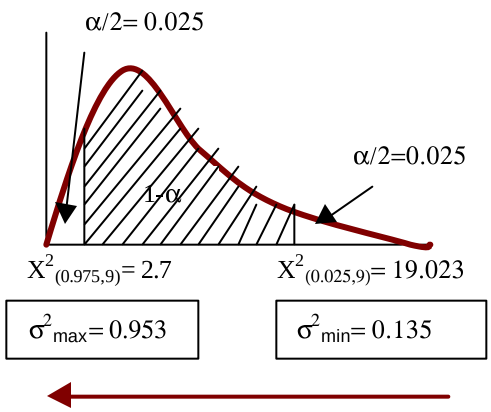
Se puede observar en la gráfica anterior que el valor de X^2 corre en forma normal, esto es de izquierda a derecha.

Por lo tanto, el intervalo de confianza de 95% para la varianza es:

$$s^2 \max = \frac{(10-1)(0.286)}{2.7} = 0.953$$

$$s^2 \min = \frac{(10-1)(0.286)}{19.023} = 0.135$$

Graficamente:



Se observa que la varianza corre en sentido contrario, pero esto es sólo en la gráfica. La interpretación quedaría similar a nuestros temas anteriores referentes a estimación. Con un nivel de confianza del 95% se sabe que la varianza de la población de los pesos de los paquetes de semillas de pasto esta entre 0.135 y 0.935 decagramos al cuadrado.

2. En trabajo de laboratorio se desea llevar a cabo comprobaciones cuidadosas de la variabilidad de los resultados que producen muestras estándar. En un estudio de la cantidad de calcio en el agua potable, el cual se efectúa como parte del control de calidad, se analizó seis veces la misma muestra en el laboratorio en intervalos aleatorios. Los seis resultados en partes por millón fueron 9.54, 9.61, 9.32, 9.48, 9.70 y 9.26. Estimar la varianza de los resultados de la población para este estándar, usando un nivel de confianza del 90%.

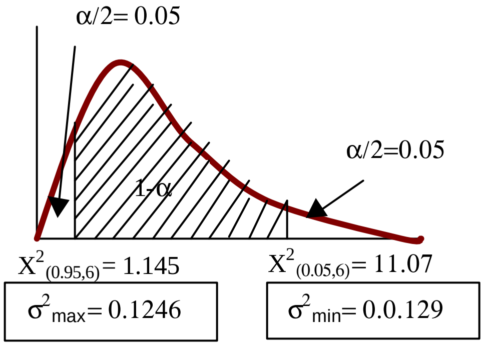
Solución:

Al calcular la varianza de la muestra se obtiene un valor de s^2= 0.0285.

Se busca en la tabla los valores correspondientes con 5 grados de libertad, obteniéndose dos resultados. Para $X^2_{(0.95,5)}$= 1.145 y para $X^2_{(0.0,5)}$= 11.07.

Entonces el intervalo de confianza esta dado por:

$$s^2 \max = \frac{(6-1)(0.0285)}{1.145} = 0.1246 \quad \text{y} \quad s^2 \min = \frac{(6-1)(0.0285)}{11.07} = 0.0129$$



Ensayo de Hipótesis para la Varianza de una Población Normal

En la mayoría de los casos se tiene el problema de desconocer la varianza o desviación estándar de la población, en donde las distribuciones son normales. Si se desea probar una hipótesis acerca de la varianza se puede hacer utilizando las medidas estadísticas con las que se construyó el intervalo de confianza σ^2, esto es con la distribución Ji- cuadrada.

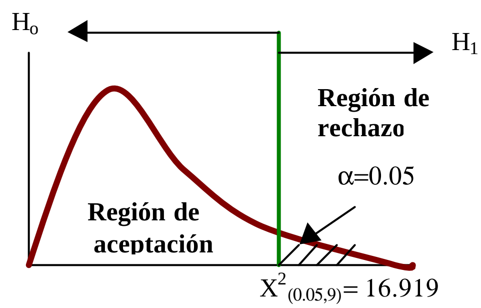
Ejemplos:

1. Una compañía que produce una parte maquinada para un motor, afirma que tiene una varianza de diámetro no mayor a 0.0002 pulgadas. Una muestra aleatoria de 10 de dichas partes dio una varianza de muestra s^2 = 0.0003. Si se supone que las medidas del diámetro se distribuyen en forma normal, ¿hay evidencia para refutar lo que afirma el proveedor? Use α= 0.05.

Solución:
Como en todos los ensayos de hipótesis que se han realizado anteriormente el procedimiento es el mismo. Después de que se identifican los datos, se plantea la hipótesis para determinar el tipo de ensayo.

Datos:
σ^2= 0.0002
n = 10
s^2 = 0.0003
α= 0.05

Ensayo de hipótesis:
H_o; σ^2= 0.0002
H_1; σ^2> 0.0002



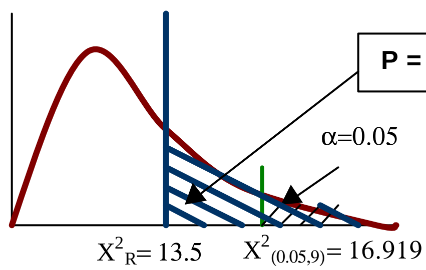
Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 16.919$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 16.919$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2{}_R = \frac{(n-1)s^2}{s^2} = \frac{(10-1)(0.0003)}{0.0002} = 13.5$$

Justificación y decisión:
Como 13.5 no es mayor que 16.919 por lo tanto no se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia de 0.05 que no se puede refutar la afirmación del proveedor.

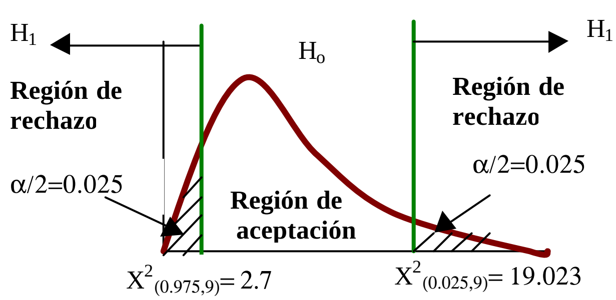
Este ejercicio se puede aprovechar para calcular el valor de P. En la tabla se busca el valor de 13.5 en el renglón de 9 grados de libertad. Interpolando entre 0.10 y 0.20 se obtiene un valor de P de 0.1484.



2. El contenido de azúcar del almíbar de los duraznos enlatados tiene una distribución normal, donde se cree que la varianza es σ^2 = 18 mg^2. Se toma una muestra de 10 latas dieron una desviación estándar de 4.8 mg. ¿Muestran estos datos suficiente evidencia para decir que la varianza ha cambiado?. Use un α = 0.05 y calcule el valor de P.

Solución:
Datos:
σ^2= 18
n = 10
s = 4.8
α= 0.05

Ensayo de hipótesis:
H_o; σ^2= 18
H_1; $\sigma^2 \neq$ 18



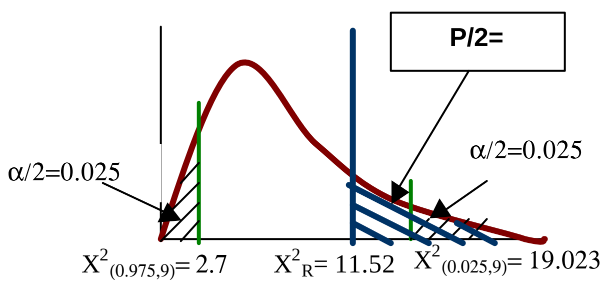
Regla de decisión:
Si $2.7 \leq X^2_R \leq 19.023$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R < 2.7$ ó si $X^2_R > 19.023$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2{}_R = \frac{(n-1)s^2}{s^2} = \frac{(10-1)(4.8)^2}{18} = 11.52$$

Justificación y decisión:
Como 11.52 está entre 2.7 y 19.023, no se rechaza $H_{o,}$ y se concluye con un nivel de significancia de 0.05 que la varianza del contenido de azúcar del almíbar no ha cambiado, esto es es de 18 mg^2.

Si recordamos al principio de este tema se dijo que la media de la distribución ji-cuadrada es (n-1), por lo tanto la media de este ejercicio es de 9. Como el valor real de $X^2_R = 11.52$ este número se encuentra a la derecha de la media, lo cual quiere decir que el valor de P/2 será el área a la derecha del valor de X^2_R. Al buscar el valor de 11.52 en la tabla se obtiene un área de 0.2423, por lo tanto P/2 = 0.2423 y **P= (2)(0.2423) = 0.4846**



3. Experiencia anterior indica que el tiempo que se requiere para que los estudiantes de último año de preparatoria completen una prueba estandarizada es una variable aletoria normal con una desviación estándar de seis minutos. Se toma una muestra aleatoria de 20 estudiantes de último año de preparatoria y se obtiene una desviación estándar de 4.51. ¿Muestran estos datos suficiente evidencia para decir que la desviación estándar disminuyó?. Utilice el valor de P para su decisión.

Solución:

Datos:
$\sigma = 6$
n = 20
s = 4.51

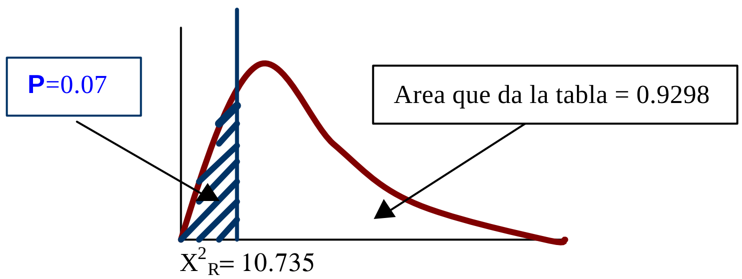
Ensayo de hipótesis:

H_o; $\sigma = 6$
H_1; $\sigma < 6$

Cálculos:

$$X^2_R = \frac{(n-1)s^2}{s^2} = \frac{(20-1)(4.51)^2}{(6)^2} = 10.735$$

Para obtener el valor de P, se busca en la tabla el 10.735 con 19 grados de libertad, y el área que se encuentra es la que está a la derecha de este valor. Como la media de esta distribución ji-cuadrada es de 19, por lo tanto el valor de 10.735 queda a la izquierda de la media. El valor de P es de 0.07, y con esto se puede concluir que si hubiéramos utilizado un nivel de significancia de 0.10, se rechaza H_o y se concluye que la desviación estándar disminuyo, pero si se utiliza un valor de $\alpha = 0.05$, entonces no se rechaza H_o y se concluiría que la desviación estándar no disminuyó. La decisión depende del error tipo I que esté dispuesto a tolerar el investigador.



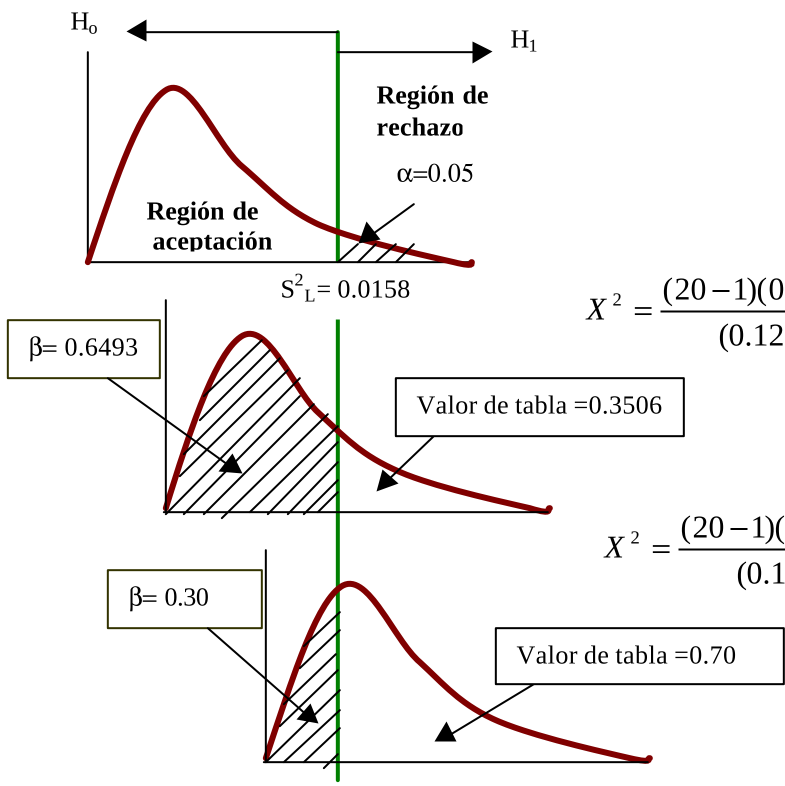
Error tipo II ó b

El error tipo II se calcula de la misma forma en la que se calculó con la distribución z. Se realizarán algunos ejercicios en los cuales se determinará la probabilidad de cometer el error tipo II, utilizando la tabla de la distribución Ji-cuadrada.

1. Se tiene un ensayo de hipótesis unilateral derecho, con n=20 y α= 0.05
   H_o; $\sigma = 0.10$
   H_1; $\sigma > 0.10$
   Se quiere calcular el error tipo II ó β si las desviaciones estándar verdaderas fueran de 0.12 y 0.14.

Solución:
Para poder calcular el error tipo II, primero se debe encontrar el valor de la varianza muestral límite, esto es s^2_L, para poder calcular los valores de X^2 y posteriormente calcular el área. Al buscar en la tabla $X^2_{(0.05,19)}$=30.144, este valor se sustituirá en la formula. Al despejar de la fórmula original de X^2 se obtiene:

$$s_L^2 = \frac{X_L^2 s^2}{(n-1)} = \frac{(30.144)(0.10)^2}{(20-1)} = 0.0158$$



$$X^2 = \frac{(20-1)(0.0158)}{(0.12)^2} = 20.84$$

$$X^2 = \frac{(20-1)(0.0158)}{(0.14)^2} = 15.31$$

2. Encontrar el error tipo II para el ejercicio 2 de esta sección, en donde el ensayo es bilateral pues se quiere ver si la varianza del contenido de azúcar en el almíbar de los duraznos ha cambiado. Suponga una varianza real de 20 y 26.

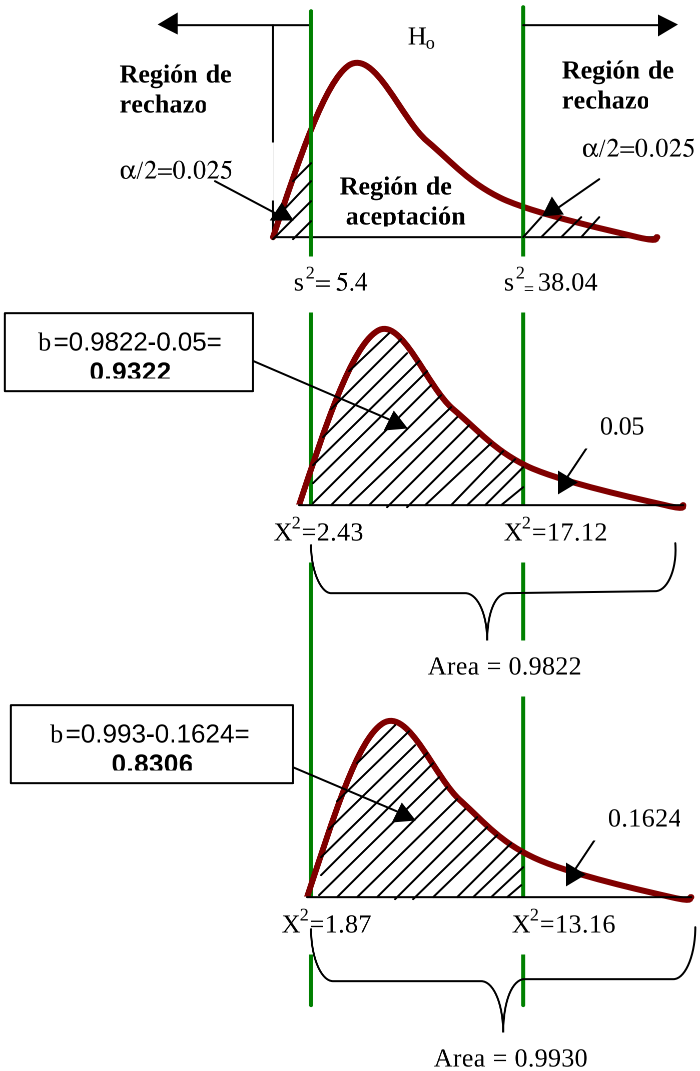
Solución:
Como este es un ensayo bilateral se tendrán dos valores de s^2_L. Los cuales se calcularán utilizando las ji-cuadradas límites que eran de de 2.7 y 19.023.

$$s_L^2 = \frac{X_L^2 s^2}{(n-1)} = \frac{(2.7)(18)}{(10-1)} = 5.4$$

y

$$s_L^2 = \frac{X_L^2 s^2}{(n-1)} = \frac{(19.023)(18)}{(10-1)} = 38.04$$

Estos dos valores se utilizarán para calcular las nuevas ji-cuadradas para calcular el valor de β.



$$X^2 = \frac{(10-1)(5.4)}{20} = 2.43$$

$$X^2 = \frac{(10-1)(38.04)}{20} = 17.12$$

$$X^2 = \frac{(10-1)(5.4)}{26} = 1.87$$

$$X^2 = \frac{(10-1)(38.04)}{26} = 13.16$$

DISTRIBUCION "F" FISHER

La necesidad de disponer de métodos estadísticos para comparar las varianzas de dos poblaciones es evidente a partir del análisis de una sola población. Frecuentemente se desea comparar la precisión de un instrumento de medición con la de otro, la estabilidad de un proceso de manufactura con la de otro o hasta la forma en que varía el procedimiento para calificar de un profesor universitario con la de otro.

Intuitivamente, podríamos comparar las varianzas de dos poblaciones, σ^2_1 y σ^2_2, utilizando la razón de las varianzas muestrales s^2_1/s^2_2. Si s^2_1/s^2_2 es casi igual a 1, se tendrá poca evidencia para indicar que σ^2_1 y σ^2_2 no son iguales. Por otra parte, un valor muy grande o muy pequeño para s^2_1/s^2_2, proporcionará evidencia de una diferencia en las varianzas de las poblaciones.

La variable aleatoria F se define como el cociente de dos variables aleatorias ji-cuadrada independientes, cada una dividida entre sus respectivos grados de libertad. Esto es,

$$F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$$

donde U y V son variables aleatorias ji-cuadrada independientes con grados de libertad ν_1 y ν_2 respectivamente.

Sean U y V dos variables aleatorias independientes que tienen distribución ji cuadradas con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente. Entonces la distribución de la variable aleatoria $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ está dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n_1 + n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}\, x^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)(1 + n_1 x/n_2)^{(n_1+n_2)/2}} \qquad 0 < x < \infty$$

y se dice que sigue la distribución F con ν_1 grados de libertad en el numerador y ν_2 grados de libertad en el denominador.

La media y la varianza de la distribución F son:

$$m = \frac{n_2}{n_2 - 2} \qquad \text{para } \nu_2 > 2,$$

$$s^2 = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} \qquad \text{para } \nu_2 > 4$$

La variable aleatoria F es no negativa, y la distribución tiene un sesgo hacia la derecha. La distribución F tiene una apariencia muy similar a la distribución ji-cuadrada; sin embargo, se encuentra centrada respecto a 1, y los dos parámetros ν_1 y ν_2 proporcionan una flexibilidad adicional con respecto a la forma de la distribución.

Si s_1^2 y s_2^2 son las varianzas muestrales independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de ***poblaciones normales*** con varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, entonces:

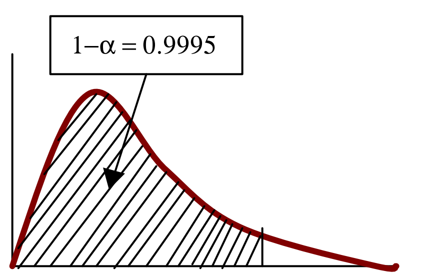
$$F = \frac{s_1^2 / s_1^2}{s_s^2 / s_2^2} = \frac{s_1^2 s_2^2}{s_2^2 s_1^2} = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2$$

Para manejar las tablas de Fisher del libro de Introducción a la Inferencia Estadística del autor Güenther, se tendrá que buscar primero los grados de libertad dos para luego localizar el área correspondiente, relacionándola con los grados de libertad uno, para calcular el valor de F.

Las tablas tienen la siguiente estructura:

		ν_1						
ν_2	P	1	2	3	…….	…..	500	∞
6	0.0005							
	0.001							
	0.005							
	.							
	.							
	0.9995			30.4				

El valor de 30.4 es el correspondiente a una Fisher que tiene 3 grados de libertad uno y 6 grados de libertad dos con un área de cero a Fisher de 0.995. Si lo vemos graficamente:



$F_{(0.9995;3,6)} = 30.4$

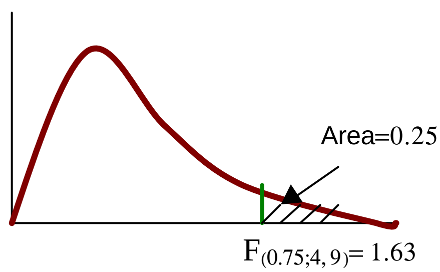
Como nos podemos imaginar existen varias curvas Fisher, ya que ahora su forma depende de dos variables que son los grados de libertad.

Ejemplos :

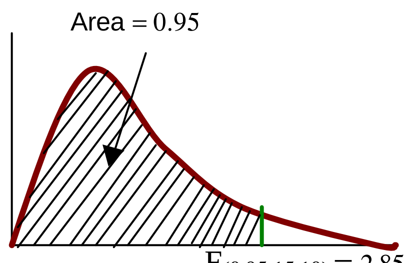
1. Encontrar el valor de F, en cada uno de los siguientes casos:
   a) El área a la derecha de F, es de 0.25 con ν_1=4 y ν_2=9.
   b) El área a la izquierda de F, es de 0.95 con ν_1=15 y ν_2=10.
   c) El área a la derecha de F es de 0.95 con con ν_1=6 y ν_2=8.
   d) El área a la izquierda de F, es de 0.10 con con ν_1=24 y ν_2=24

Solución:

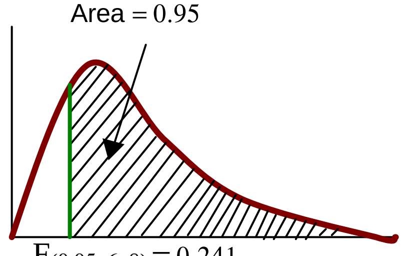
a) Como el área que da la tabla es de cero a Fisher, se tiene que localizar primero los grados de libertad dos que son 9, luego un área de 0.75 con 4 grados de libertad uno.



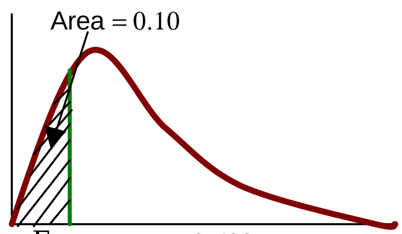
b) En este caso se puede buscar el área de 0.95 directamente en la tabla con sus respectivos grados de libertad.



c) Se tiene que buscar en la tabla un área de 0.05, puesto que nos piden un área a la derecha de F de 0.95.



d) Se busca directamente el área de 0.10, con sus respectivos grados de libertad.



2. Si s_1^2 y s_2^2 son las varianzas muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1=10 y n_2 =20, tomadas de poblaciones normales que tienen las mismas varianzas, encuentre $P(s_1^2/s_2^2 \leq 2.42)$.

Solución:
Primero se establecen los grados de libertad. Como en el numerador está la población uno y en el denominador la población dos, entonces los grados de libertad uno equivalen a 10-1=9 y los grados de libertad dos a 20-1=19.

Se procede a ir a la tabla a buscar los grados de libertad dos que son 19 y se observa que no están, por lo tanto se tiene que interpolar entre 15 y 20 grados de libertad, buscando el valor de fisher que quedaría:

$$F = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 = (2.42)(1) = 2.42$$

Este valor de 2.42 se busca en la columna de 9 grados de libertad uno, con 15 grados de libertad dos, y se encuentra los siguiente:

Area	**n_1= 9**
0.90	2.09
0.95	2.59

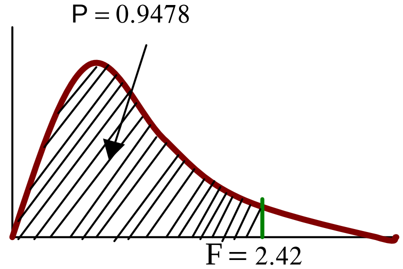
Al interpolar entre estos dos valores nos queda un área de 0.933.
Se procede a hacer lo mismo pero con 20 grados de libertad dos:

Area	**n_1= 9**
0.95	2.39
0.975	2.84

Al interpolar entre estos dos valores nos queda un área de 0.9516.
Ahora ya se tienen las dos áreas referentes a los grados de libertad dos, por lo que se interpolará para ver cuánto le corresponde a los grados libertad dos con un valor de 19.

n_2	**Area**
15	0.933
20	0.9516

Al interpolar nos queda que para 9 grados de libertad uno y 19 grados de libertad dos con un valor de Fisher de 2.42 el área a la izquierda es de 0.9478.



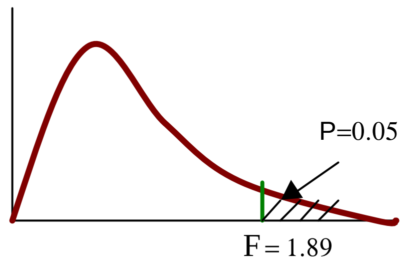
3. Si s_1^2 y s_2^2 representan las varianzas de las muestras aleatorias independientes de tamaño $n_1 = 25$ y $n_2 = 31$, tomadas de poblaciones normales con varianzas $\sigma_1^2 = 10$ y $\sigma_2^2 = 15$, respectivamente, encuentre $P(s_1^2/s_2^2 > 1.26)$.

Solución:

Calcular el valor de Fisher:

$$F = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 = (1.26)\left(\frac{15}{10}\right) = 1.89$$

Luego se va a la tabla de Fisher a buscar 30 grados de libertad 2 con 24 grados de libertad uno. Cuando se este en esta posición se busca adentro de la tabla el valor de Fisher de 1.89. Al localizarlo y ver a la izquierda de este valor se obtiene un área de 0.95, pero esta área correspondería a la probabilidad de que las relaciones de varianzas muestrales fueran menor a 1.26, por lo que se calcula su complemento que sería 0.05, siendo esta la probabilidad de que $s_1^2/s_2^2 > 1.26$.



Intervalo de Confianza para el Cociente de Varianzas de Dos Distribuciones Normales

Supóngase que se tienen dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente. De este par de poblaciones, se tienen disponibles dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2, respectivamente, sean s_1^2 y s_2^2 las dos varianzas muestrales. Se desea conocer un intervalo de confianza del 100(1-α) por ciento para el cociente de las dos varianzas, σ_1^2/σ_2^2.

Para construir el intervalo de confianza para el cociente de dos varianzas poblacionales, se coloca la varianza muestral mayor en el numerador del estadístico F.

Ejemplos:

1. Un fabricante de automóviles pone a prueba dos nuevos métodos de ensamblaje de motores respecto al tiempo en minutos. Los resultados se muestran el la tabla:

Método 1	**Método 2**
$n_1 = 31$	$n_2 = 25$
$s_1^2 = 50$	$s_2^2 = 24$

Construya un intervalo de confianza del 90% para σ_1^2/σ_2^2.

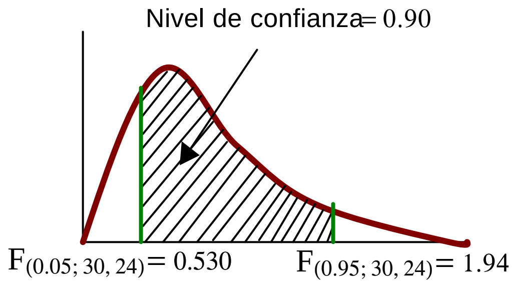
Solución:

Por la recomendación de que la varianza muestral mayor va en el numerador se tiene la siguiente fórmula:

$$F = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2$$

al despejar: $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{s_1^2}{Fs_2^2}$.

F toma dos valores dependiendo del nivel de confianza y de los grados de libertad. En este caso los grados de libertad uno valen 30 y los grados de libertad dos 24.



$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{s_1^2}{Fs_2^2} = \frac{50}{(0.530)(24)} = 3.93 \quad \text{y} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{s_1^2}{Fs_2^2} = \frac{50}{(1.94)(24)} = 1.07$$

Estos resultados los podemos interpretar de la siguiente manera:

Con un nivel de confianza del 90% se sabe que la relación de varianzas σ_1^2/σ_2^2 esta entre 1.07 y 3.93. Esto supondría que la varianza de la población 1 es mayor a la varianza de la población 2 entre 1.07 y 3.93.

2. Una compañía fabrica propulsores para uso en motores de turbina. Al ingeniero de manufactura le gustaría seleccionar el proceso que tenga la

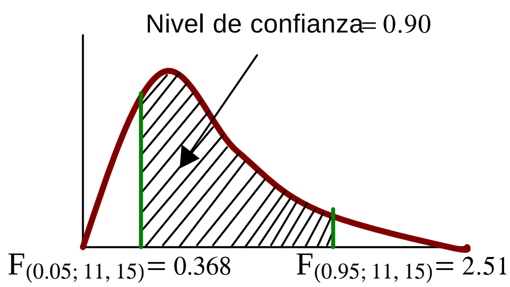
menor variabilidad en la rugosidad de la superficie. Para ello toma una muestra de n_1=16 partes del primer proceso, la cual tiene una desviación estándar s_1 = 4.7 micropulgadas, y una muestra aleatoria de n_2=12 partes del segundo proceso, la cual tiene una desviación estándar s_2 = 5.1 micropulgadas. Se desea encontrar un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las dos varianzas σ_1^2/σ_2^2. Suponga que los dos procesos son independientes y que la rugosidad de la superficie está distribuida de manera normal.

Solución:
Por la recomendación de que la varianza muestral mayor va en el numerador se tiene la siguiente fórmula:

$$F = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2$$

al despejar: $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{F s_1^2}{s_2^2}$.

En este caso los grados de libertad uno valen 11 y los grados de libertad dos 15.



$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{F s_1^2}{s_2^2} = \frac{(0.368)(4.7)^2}{5.1^2} = 0.3125 \quad \text{y} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{F s_1^2}{s_2^2} = \frac{(2.51)(4.7)^2}{5.1^2} = 2.13$$

Estos resultados los podemos interpretar de la siguiente manera:
Puesto que este intervalo de confianza incluye a la unidad, no es posible afirmar que las desviaciones estándar de la rugosidad de la superficie de los dos procesos sean diferentes con un nivel de confianza del 90%.

Ensayo de Hipótesis

Supóngase que se tiene interés en dos poblaciones normales independientes, donde las medias y las varianzas de la población son desconocidas. Se desea probar la igualdad de las dos varianzas, ya que para poder comparar las medias de estas dos poblaciones se utiliza la distribución t de Student, en la cual podemos tener varianzas iguales o diferentes en la población.
Para conocer esto último se requiere de la distribución Fisher, y después de utilizarla, se tomará la decisión de tener o no varianzas iguales en la población,

dando pié a realizar la comparación de las dos medias según estemos hablando. Primer caso en que las varianzas de la población son desconocidas pero iguales, o en el caso dos donde se tienen varianzas desconocidas pero disímiles.

Para el ensayo de hipótesis se utilizará la relación de varianzas, la cual puede dar tres resultados:

$$\sigma_1^2/\sigma_2^2 \begin{cases} >1 & \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ =1 & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ <1 & \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

En base a lo que se quiera probar, el ensayo podrá ser unilateral derecho, izquierdo o bilateral.

Ejemplos:

1. La variabilidad en la cantidad de impurezas presentes en un lote de productos químicos, utilizada para un proceso en particular, depende del tiempo que tarda el proceso. Un fabricante que emplea dos líneas de producción 1 y 2, hizo un pequeño ajuste al proceso 2, con la esperanza de reducir la variabilidad, así como la cantidad media de impurezas en los productos químicos. Muestras de n_1=25 y n_2=20 mediciones de dos lotes produjeron las siguientes medias y varianzas:

   $$\bar{x}_1 = 3.2 \quad s^2{}_1 = 1.04 \qquad \bar{x}_2 = 3.0 \qquad s^2{}_2 = 0.51$$

   ¿Presentan los datos evidencia suficiente para indicar que las variaciones del proceso son menores para el 2? Realice una prueba con un α = 0.05.

Solución:

Datos:

Población 1	Población 2
$\bar{x}_1 = 3.2$	$\bar{x}_2 = 3.0$
$s^2{}_1 = 1.04$	$s^2{}_2 = 0.51$
n_1 = 25	n_2 = 20
α = 0.05	

Ensayo de hipótesis:

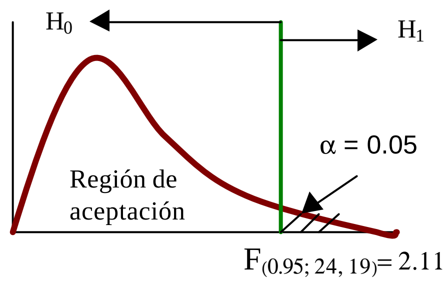
$$H_o; s_1^2 / s_2^2 = 1$$

$$H_1; s_1^2 / s_2^2 \rangle 1$$

Estadístico de prueba:

$F = \frac{s_1^{\,2}}{s_2^{\,2}}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. ν_1= 25-1 = 24 y ν_2 = 20-1=19.



Regla de decisión:

Si $F_c \leq 2.11$ No se rechaza H_o,

Si la $F_c > 2.11$ se rechaza H_o.

Cálculo:

$$F = \frac{s_1^{\,2}}{s_2^{\,2}} = \frac{1.04}{0.51} = 2.04$$

Decisión y Justificación:

Como 2.04 es menor que 2.11 no se rechaza H_o, y se concluye con un α = 0.05 que no existe suficiente evidencia para decir que la varianza del proceso 2 es menor que la del proceso 1.

2. En su incansable búsqueda de un sistema de llenado adecuado, cierta empresa prueba dos máquinas. Robo-fill se usa para llenar 16 tarros y da una desviación estándar de 1.9 onzas en el llenado. Con Automat-fill se llenan 21 frascos que dan una desviación estándar de 2.1 onzas. Si la empresa tiene que elegir uno de estos sistemas en función de la uniformidad de llenado. ¿Cual deberá seleccionar? Use un α = 0.10.

Solución:

Datos:

Robo-Fill	Automat-Fill
$s_{RF} = 1.9$	$s_{AF} = 2.1$
$n_{RF} = 16$	$n_{AF} = 21$
$\alpha = 0.10$	

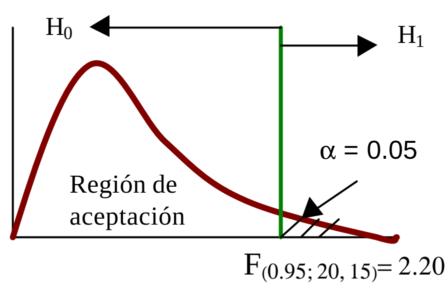
Ensayo de hipótesis:

$$H_o; s_{AF}^2 / s_{RF}^2 = 1$$
$$H_1; s_{AF}^2 / s_{RF}^2 \rangle 1$$

Estadístico de prueba:

$F = \dfrac{s_{AF}^2}{s_{RF}^2}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. $\nu_1 = 21-1 = 20$ y $\nu_2 = 16-1=15$.



Regla de decisión:

Si $F_c \leq 2.20$ No se rechaza H_o,

Si la $F_c > 2.20$ se rechaza H_o.

Cálculo:

$$F = \frac{s_{AF}^2}{s_{RF}^2} = \frac{2.1^2}{1.9^2} = 1.22$$

Decisión y Justificación:

Como 1.22 es menor que 2.20 no se rechaza H_o, y se concluye con un $\alpha = 0.10$ que la variación de llenado de la máquina Robo-Fill no es menor a la de Automat-Fill, por lo que se selecciona cualquier máquina.

3. Las capas de óxido en las obleas semiconductoras son depositadas en una mezcla de gases para alcanzar el espesor apropiado. La variabilidad del espesor es una característica crítica de la oblea, y lo deseable para los siguientes pasos de la fabricación es tener una variabilidad baja. Para ello se estudian dos mezclas diferentes de gases con la finalidad de determinar con cuál se obtienen mejores resultados en cuanto a la reducción en la variabilidad del espesor del óxido. Veintiún obleas son depositadas en cada gas. Las desviaciones estándar de cada muestra del espesor del óxido son $s_1 = 1.96$ angstroms y $s_2 = 2.13$ angstroms. ¿Existe evidencia que indique una diferencia en las desviaciones? Utilice $\alpha=0.05$.

Solución:

Datos:

$s_1 = 1.96$ $s_2 = 2.13$

$n_1 = 21$ $n_2 = 21$

Ensayo de hipótesis:

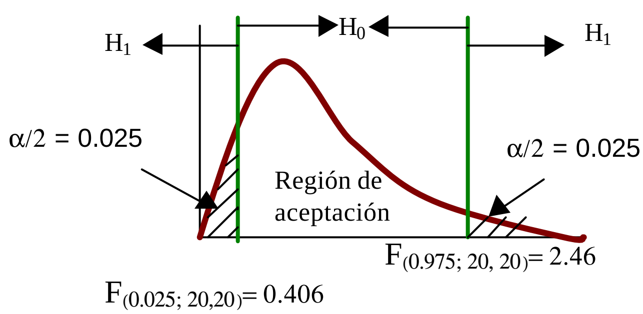
$$H_o; s_2^2/s_1^2 = 1$$

$$H_o; s_2^2/s_1^2 \neq 1$$

Estadístico de prueba:

$F = \dfrac{s_2^2}{s_1^2}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. $\nu_1 = 21-1 = 20$ y $\nu_2 = 21-1=20$.



Regla de decisión:
Si $0.406 \leq F_c \leq 2.46$ No se rechaza H_o,
Si la $F_c < 0.406$ ó si $F_c > 2.46$ se rechaza H_o.

Cálculo:

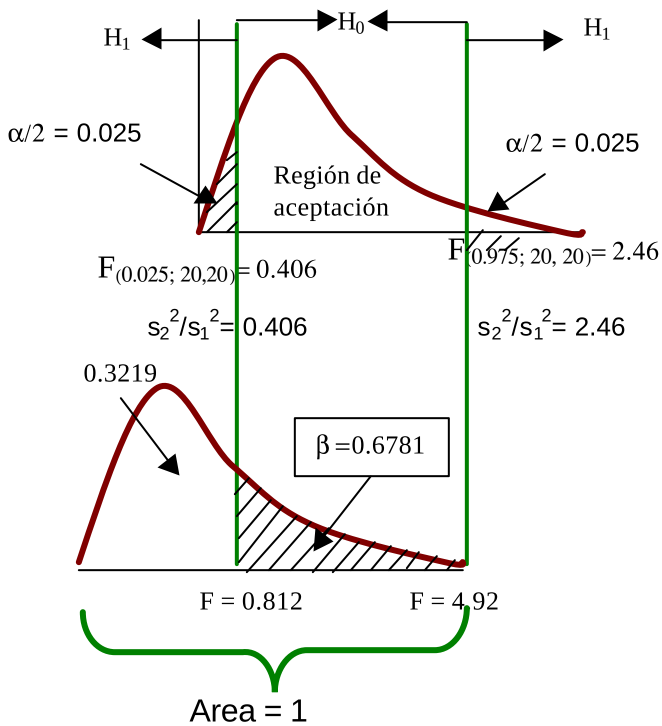
$$F = \frac{s_2^{\ 2}}{s_1^{\ 2}} = \frac{1.96^2}{2.13^2} = 0.85$$

Decisión y Justificación:
Como 0.85 esta entre los dos valores de H_o no se rechaza , y se concluye con un α = 0.05 que existe suficiente evidencia para decir que las varianza de las poblaciones son iguales.

Error Tipo II ó b

1. Para el ejercicio anterior, encontrar la probabilidad de cometer error tipo II si la verdadera relación $\sigma_1^{\ 2}/\sigma_2^{\ 2} = 2$.

Solución:



$$F = \left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\left(\frac{s_1^{\ 2}}{s_2^{\ 2}}\right)$$

$$F = \left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\left(\frac{s_1^{\ 2}}{s_2^{\ 2}}\right) = (0.406)(2) = 0.812$$

$$F = \left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\left(\frac{s_1^{\ 2}}{s_2^{\ 2}}\right) = (2.46)(2) = 4.92$$

2. Del ejercicio número 1 del ensayo de hipótesis en donde la variabilidad en la cantidad de impurezas presentes en un lote de productos químicos dependía del tiempo que tardaba el proceso y el fabricante empleaba dos líneas de producción 1 y 2, e hizo un pequeño ajuste al proceso 2, calcular la probabilidad de cometer error tipo II si le relación $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1.5$.

Solución:

$F = \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\right)$ por lo tanto $s_1^2/s_2^2 = 2.11$ ya que esto fue lo que dio la tabla y al despejar nos queda los mismo. Se calcula un nuevo valor de F con la relación de varianzas de 1.5.

$$F = \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)\left(\frac{s_2^2}{s_1^2}\right) = (2.11)\left(\frac{1}{1.5}\right) = 1.406$$

Si se recuerda para este ejercicio se tienen 24 grados de libertad uno y 19 de grados de libertad dos, por lo que se tiene que hacer una doble interpolación ya que 19 grados de libertad dos no vienen en la tabla.

Primero se interpolará para 24 grados de libertad uno y 15 grados de libertad dos:

Area	**Valor de F**
0.50	1.02
0.75	1.41

Al interpolar para un valor de Fisher de 1.406 se ve que este valor está muy cercano a 1.41, el cual le corresponde un área de 0.75, por lo que queda un resultado de 0.7474

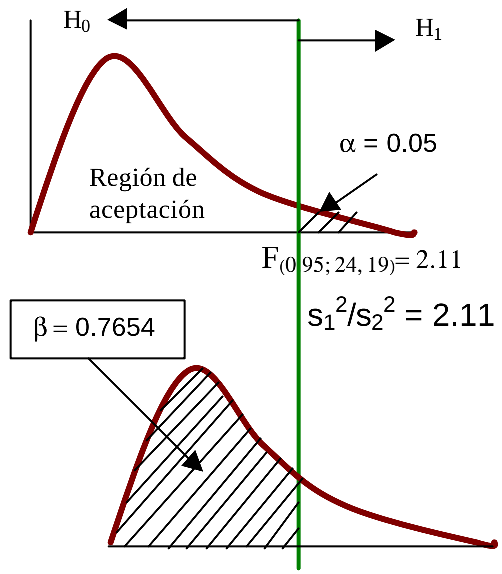
Ahora se procede a interpolar para 24 grados de libertad uno y 20 grados de libertad dos:

Area	**Valor de F**
0.75	1.35
0.90	1.77

La interpolación para un valor de Fisher de 1.406 es de 0.77.
Teniendo los dos valores, se puede calcular el área correspondiente a 24 grados de libertad uno y 19 grados de libertad dos:

n_2	**Area**
15	0.7474
20	0.77

Por lo tanto al interpolar para 19 grados de libertad dos nos da un valor de 0.76548



H0
H1
α = 0.05
Región de
aceptación
F(0.95; 24, 19)= 2.11
β = 0.7654
s1²/s2² = 2.11

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS DE DOS DISTRIBUCIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS

En esta sección se verá el caso en donde se tienen dos poblaciones con medias y varianzas desconocidas, y se desea encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de dos medias m_1-m_2. Si los tamaños de muestras n_1 y n_2 son mayores que 30, entonces, puede emplearse el intervalo de confianza de la distribución normal. Sin embargo, cuando se toman muestras pequeñas se supone que las poblaciones de interés están distribuidas de manera normal, y los intervalos de confianza se basan en la distribución t.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS DE DOS DISTRIBUCIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO IGUALES

Si $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, s_1^2 y s_2^2 son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas pero iguales, entonces un intervalo de confianza del 100(1-a) por ciento para la diferencia entre medias es:

$$m_1 - m_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

en donde:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2 (n_1 - 1) + s_2^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

es el estimador combinado de la desviación estándar común de la población con n_1+n_2 – 2 grados de libertad.

Ejemplos:

1. **Un artículo publicado dio a conocer los resultados de un análisis del peso de calcio en cemento estándar y en cemento contaminado con plomo. Los niveles bajos de calcio indican que el mecanismo de hidratación del cemento queda bloqueado y esto permite que el agua ataque varias partes de una estructura de cemento. Al tomar diez muestras de cemento estándar, se encontró que el peso promedio de calcio es de 90 con una desviación estándar de 5; los resultados obtenidos con 15 muestras de cemento contaminado con plomo fueron de 87 en promedio con una desviación estándar de 4. Supóngase que el porcentaje de peso de calcio está distribuido de manera normal. Encuéntrese un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre**

medias de los dos tipos de cementos. Por otra parte, supóngase que las dos poblaciones normales tienen la misma desviación estándar.

Solución:

El estimador combinado de la desviación estándar es:

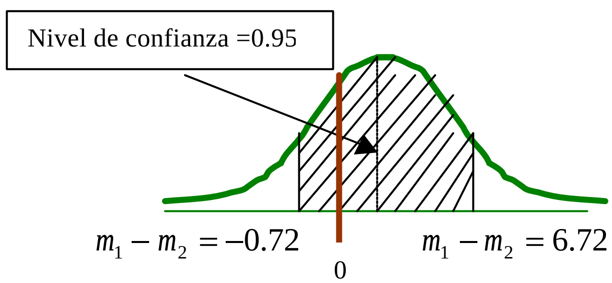
$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1-1)+s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2} = \frac{5^2(10-1)+4^2(15-1)}{10+15-2} = 19.52$$

Al calcularle raíz cuadrada a este valor nos queda que s_p = 4.41

$$m_1 - m_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t s_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = (90-87) \pm (2.069)(4.41)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$$

expresión que se reduce a $-0.72 \le \mu_1 - \mu_2 \le 6.72$

Nótese que el intervalo de confianza del 95% incluye al cero; por consiguiente, para este nivel confianza, no puede concluirse la existencia de una diferencia entre las medias.



2. **Se realizó un experimento para comparar el tiempo promedio requerido por el cuerpo humano para absorber dos medicamentos, A y B. Suponga que el tiempo necesario para que cada medicamento alcance un nivel específico en el torrente sanguíneo se distribuye normalmente. Se eligieron al azar a doce personas para ensayar cada fármaco registrándose el tiempo en minutos que tardó en alcanzar un nivel específico en la sangre. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la diferencia del tiempo promedio. Suponga varianzas iguales.**

Medicamento A	Medicamento B
n_A = 12	**n_B = 12**
$\bar{x}_A = 26.8$	$\bar{x}_B = 32.6$
S_A^2 = 15.57	**S_B^2 = 17.54**

Solución:

$$s_p = \sqrt{\frac{s_A^2(n_A-1)+s_B^2(n_B-1)}{n_A+n_B-2}} = \sqrt{\frac{15.57\ \ (12-1)+17.54(12-1)}{12+12-2}} = 4.07$$

$$m_B - m_A = (\bar{x}_B - \bar{x}_A) \pm t s_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} = (32.6 - 26.8) \pm (2.074)(4.07)\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}$$

$2.35 \leq \mu_B - \mu_A \leq 9.25$

Con un nivel confianza del 95% se sabe que el tiempo promedio para alcanzar un nivel específico es mayor para el medicamento B.

PRUEBA SOBRE DOS MEDIAS, POBLACIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO IGUALES

Las situaciones que más prevalecen e implican pruebas sobre dos medias son las que tienen varianzas desconocidas. Si el científico prueba mediante una prueba F, que las varianzas de las dos poblaciones son iguales, se utiliza la siguiente fórmula:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

donde:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Los grados de libertad están dados por:

$$n = n_1 + n_2 - 2$$

Ejemplos:

1. Para encontrar si un nuevo suero detiene la leucemia, se seleccionan nueve ratones, todos con una etapa avanzada de la enfermedad. Cinco ratones reciben el tratamiento y cuatro no. Los tiempos de sobrevivencia en años, a partir del momento en que comienza el experimento son los siguientes:

Con Tratamiento	2.1	5.3	1.4	4.6	0.9
Sin Tratamiento	1.9	0.5	2.8	3.1	

¿Se puede decir en el nivel de significancia del 0.05 que el suero es efectivo? Suponga que las dos poblaciones se distribuyen normalmente con varianzas iguales.

Solución:

Primero se probará el supuesto de varianzas iguales con un ensayo de hipótesis bilateral utilizando la distribución Fisher.

Datos:

Con tratamiento	Sin tratamiento
$\bar{x} = 2.86$	$\bar{x} = 2.075$
s= 1.97	s = 1.1672
n = 5	n = 4

Ensayo de hipótesis:

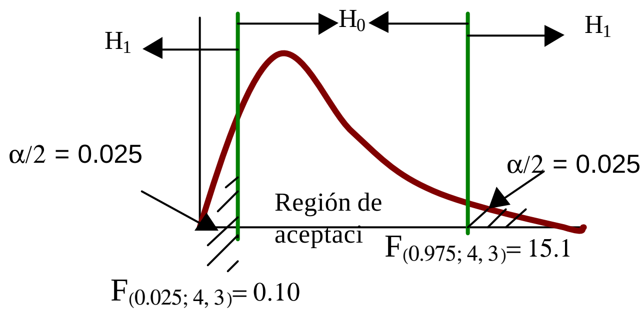
$$H_o; s_{CT}^{\ 2} / s_{ST}^{\ 2} = 1$$

$$H_o; s_{CT}^{\ 2} / s_{ST}^{\ 2} \neq 1$$

Estadístico de prueba:

$F = \dfrac{s_{CT}^{\ 2}}{s_{ST}^{\ 2}}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. ν_1= 5-1 = 4 y ν_2 = 4-1=3.



Regla de decisión:

Si $0.10 \leq F_c \leq 15.1$ No se rechaza H_o,

Si la $F_c < 0.10$ ó si $F_c > 15.1$ se rechaza H_o.

Cálculo:

$$F = \frac{s_{CT}^{\ 2}}{s_{ST}^{\ 2}} = \frac{1.97^2}{1.167^2} = 2.85$$

Decisión y Justificación:

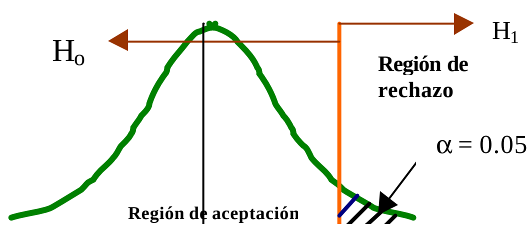
Como 2.85 esta entre los dos valores de H_o no se rechaza , y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que existe suficiente evidencia para decir que las varianza de las poblaciones son iguales.

Con la decisión anterior se procede a comparar las medias:

Ensayo de Hipótesis

H_o; $\mu_{CT}-\mu_{ST}=0$

H_1; $\mu_{CT}-\mu_{ST} > 0$



Los grados de libertad son (5+4-2) = 7

Regla de decisión:
Si $t_R \leq 1.895$ No se Rechaza H_o
Si $t_R > 1.895$ se rechaza H_o
Cálculos:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1-1)+s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2} = \frac{1.97^2(5-1)+1.672^2(4-1)}{5+4-2} = 3.415$$

por lo tanto $s_p = 1.848$

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(m_1-m_2)}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{(2.86-2.075)-0}{1.848\sqrt{1/5+1/4}} = 0.6332$$

Justificación y decisión:

Como 0.6332 es menor que 1.895, no se rechaza H_o, y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que no existe suficiente evidencia para decir que el suero detiene la leucemia.

2. **Se realizó un experimento para comparar el tiempo promedio requerido por el cuerpo humano para absorber dos medicamentos, A y B. Suponga que el tiempo necesario para que cada medicamento alcance un nivel específico en el torrente sanguíneo se distribuye normalmente. Se eligieron al azar a doce personas para ensayar cada fármaco registrándose el tiempo en minutos que tardó en alcanzar un nivel específico en la sangre. Calcule con a = 0.05 si existe diferencia entre los tiempos promedio y obtenga el valor de P. Suponga varianzas iguales.**

Medicamento A	Medicamento B
$n_A = 12$	**$n_B = 12$**
$\bar{x}_A = 26.8$	$\bar{x}_B = 32.6$
$S_A^2 = 15.57$	**$S_B^2 = 17.54$**

Solución:
Primero se pondrá a prueba el supuesto de varianzas iguales mediante una prueba de hipótesis con $\alpha = 0.10$.

Ensayo de hipótesis:

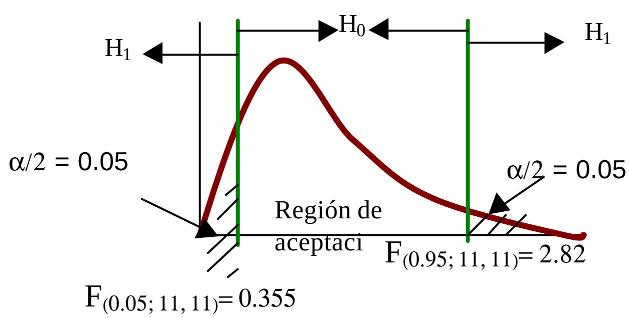
$H_o; s_B^{\,2}/s_A^{\,2} = 1$

$H_o; s_B^{\,2}/s_A^{\,2} \neq 1$

Estadístico de prueba:

$F = \dfrac{s_B^{\,2}}{s_A^{\,2}}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. ν_1= 12-1 =11 y ν_2 = 12-1=11.



Regla de decisión:

Si 0.355 $\leq F_c \leq$ 2.82 No se rechaza H_o,

Si la F_c < 0.355 ó si F_c > 2.82 se rechaza H_o.

Cálculo:

$$F = \frac{s_B^{\,2}}{s_A^{\,2}} = \frac{17.54}{15.57} = 1.13$$

Decisión y Justificación:

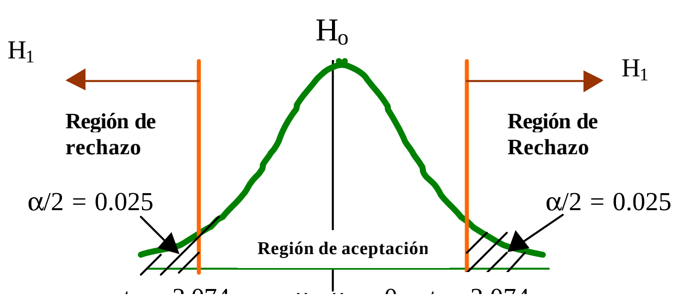
Como 1.13 esta entre los dos valores de H_o no se rechaza , y se concluye con un α = 0.10 que existe suficiente evidencia para decir que las varianza de las poblaciones son iguales.

Con la decisión anterior se procede a comparar las medias:

Ensayo de Hipótesis

H_o; μ_B-μ_A=0

H_1; μ_B-$\mu_A \neq$0



Los grados de libertad son (12+12-2) = 22

Regla de decisión:

Si $-2.074 \leq t_c \leq 2.074$ No se rechaza H_o,

Si la $t_c < -2.074$ ó si $t_c > 2.074$ se rechaza H_o.

Cálculos:

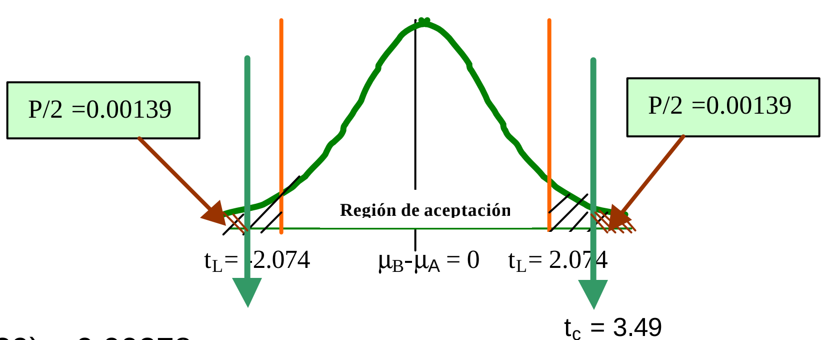
$$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1)+s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{15.57\ (12-1)+17.54(12-1)}{12+12-2}} = 4.07$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(m_1-m_2)}{s_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}} = \frac{(32.6-26.8)-0}{4.07\sqrt{1/12+1/12}} = 3.49$$

Justificación y decisión:

Como 3.49 es mayor que 2.074, no se rechaza H_o, y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que la media del tiempo para que el medicamento A llegue a un nivel específico en el torrente sanguíneo es distinta de la que toma al fármaco B alcanzar ese mismo nivel.

Para calcular el valor de P se ubicará la t calculada en la gráfica para proceder a buscar el área y multiplicarla por dos ya que es bilateral.



P = (2)(0.00139) = 0.00278

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS DE DOS DISTRIBUCIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO DIFERENTES

Consideremos ahora el problema de encontrar una estimación por intervalos de m_1-m_2 cuando no es probable que las varianzas poblacionales desconocidas sean iguales. La estadística que se usa con más frecuencia en este caso es:

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(m_1-m_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}$$

que tiene aproximadamente una distribución t con n grados de libertad, donde:

$$n=\frac{\left(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2\right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1-1)\right]+\left[\left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2-1)\right]}$$

Como n rara vez es número entero, lo redondeamos al número entero más cercano menor. Esto es si el valor de nu es de 15.9 se redondeará a 15.

Al despejar la diferencia de medias poblacionales de la formula de t nos queda:

$$m_1-m_2=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

Ejemplos:

1. **El departamento de zoología de la Universidad de Virginia llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de ortofósforo químico medido en dos estaciones diferentes del río James. El ortofósforo se mide en miligramos por litro. Se reunieron 15 muestras de la estación 1 y se ontuvo una media de 3.84 con una desviación estándar de 3.07 miligramos por litro, mientras que 12 muestras de la estación 2 tuvieron un contenido promedio de 1.49 con una desviación estándar 0.80 miligramos por litro. Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia del contenido promedio real de ortofósforo en estas dos estaciones, suponga que las observaciones vienen de poblaciones normales con varianzas diferentes.**

Solución:
Datos:

Estación 1	Estación 2
n_1 = 15	**n_2 = 12**
$\bar{x}_1=3.84$	$\bar{x}_2=1.49$
S_1= 3.07	**S_2 = 0.80**

Primero se procederá a calcular los grados de libertad:

$$n=\frac{\left(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2\right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1-1)\right]+\left[\left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2-1)\right]}=\frac{\left(3.07^2/15+0.80^2/12\right)^2}{\left[\left(3.07^2/15\right)^2/(15-1)\right]+\left[\left(0.80^2/12\right)^2/(12-1)\right]}=16.3\approx 16$$

Al usar a =0.05, encontramos en la tabla con 16 grados de libertad que el valor de t es 2.120, por lo tanto:

$$m_1 - m_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (3.84 - 1.49) \pm 2.120\sqrt{\frac{3.07^2}{15} + \frac{0.80^2}{12}}$$

que se simplifica a:

$0.60 \le \mu_1 - \mu_2 \le 4.10$

Por ello se tiene una confianza del 95% de que el intervalo de 0.60 a 4.10 miligramos por litro contiene la diferencia de los contenidos promedios reales de ortofósforo para estos dos lugares.

PRUEBA SOBRE DOS MEDIAS, POBLACIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS PERO DIFERENTES

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

$$n = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1 - 1)\right] + \left[\left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2 - 1)\right]}$$

Ejemplo:

1. Un fabricante de monitores prueba dos diseños de microcircuitos para determinar si producen un flujo de corriente equivalente. El departamento de ingeniería ha obtenido los datos siguientes:

Diseño 1	$n_1 = 16$	$\bar{x}_1 = 24.2$	$s_1^2 = 10$
Diseño 2	$n_2 = 10$	$\bar{x}_2 = 23.9$	$s_2^2 = 40$

Con $\alpha = 0.05$, se desea determinar si existe alguna diferencia significativa en el flujo de corriente promedio entre los dos diseños, donde se supone que las dos poblaciones son normales, pero no es posible suponer que las varianzas desconocidas sean iguales.

Solución:

Primero se probarán varianzas desiguales.

Ensayo de hipótesis:

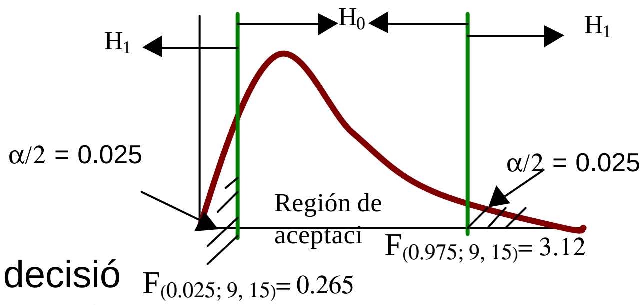
$H_o; s_2^2/s_1^2 = 1$

$H_o; s_2^2/s_1^2 \neq 1$

Estadístico de prueba:

$F = \frac{s_2{}^2}{s_1{}^2}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. ν_1= 10-1 = 9 y ν_2 = 16-1=15.



Regla de decisió

Si 0.265≤ $F_c \leq$ 3.12 No se rechaza H_o,

Si la F_c < 0.265 ó si F_c > 3.12 se rechaza H_o.

Cálculo:

$$F = \frac{s_2{}^2}{s_1{}^2} = \frac{40}{10} = 4$$

Decisión y Justificación:

Como 4 es mayor que 3.12 se rechaza H_o , y se concluye con un α = 0.05 que existe suficiente evidencia para decir que las varianza de las poblaciones son diferentes.

Con la decisión anterior se procede a comparar las medias:

Ensayo de Hipótesis

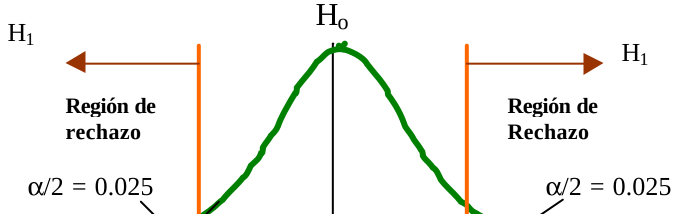
H_o; μ_1-μ_2=0

H_1; μ_1-$\mu_2 \neq 0$

Para poder buscar el valor de t en la tabla, se necesita saber el valor de los grados de libertad:

$$n = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1-1)\right] + \left[\left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2-1)\right]} = \frac{(10/16 + 40/10)^2}{\left[(10/16)^2/(16-1)\right] + \left[(40/10)^2/(10-1)\right]} = 11.858$$

Este valor se redondea al próximo menor que sería 11.



Regla de decisión:
Si $-2.201 \leq t_R \leq 2.201$ No se rechaza H_o
Si $t_R < -2.201$ ó si $t_R > 2.201$ se rechaza H_o

Cálculos:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} = \frac{(24.2 - 23.9) - 0}{\sqrt{10/16 + 40/10}} = 0.1395$$

Justificación y decisión:

Como 0.1395 esta entre –2.201 y 2.201, no se rechaza H_o y se concluye con un $\alpha = 0.05$, que no existe diferencia significativa en el flujo de corriente promedio entre los dos diseños.

2. Dos proveedores fabrican un engrane de plástico utilizado en una impresora láser. Una característica importante de estos engranes es la resistencia al impacto la cual se mide en pies-libras. Una muestra aleatoria de 10 engranes suministrados por el primer proveedor arroja los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 290$ y $s_1 = 12$. Del segundo proveedor se toma una muestra aleatoria de 16 engranes, donde los resultados son $\bar{x}_2 = 321$ y $s_2 = 45$. ¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que los engranes del proveedor 2 tienen una mayor resistencia promedio al impacto. Use un nivel de significancia de 0.05. Calcule el valor de P.

Solución:

Datos:

Proveedor 1	Proveedor 2
$n_1 = 10$	**$n_2 = 16$**
$\bar{x}_1 = 290$	$\bar{x}_2 = 321$
$S_1 = 12$	**$S_2 = 45$**

Primero se probarán varianzas desiguales.

Ensayo de hipótesis:

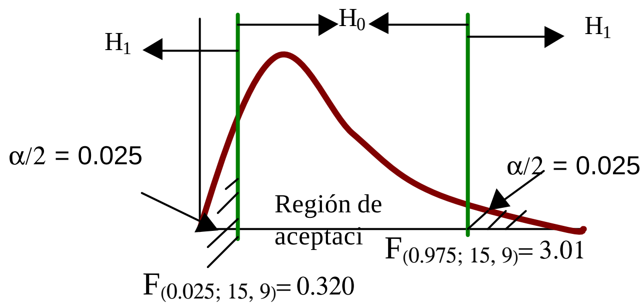
$H_o; s_2^2 / s_1^2 = 1$

$H_o; s_2^{\ 2}/s_1^{\ 2} \neq 1$

Estadístico de prueba:

$F = \frac{s_2^{\ 2}}{s_1^{\ 2}}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. ν_1= 16-1 = 15 y ν_2 = 10-1=9.



Regla de decisión:
Si 0.320≤ F_c ≤ 3.01 No se rechaza H_o,
Si la F_c < 0.320 ó si F_c > 3.01 se rechaza H_o.

Cálculo:

$$F = \frac{s_2^{\ 2}}{s_1^{\ 2}} = \frac{45^2}{12^2} = 14.06$$

Decisión y Justificación:
Como 14.06 es mayor que 3.01 se rechaza H_o , y se concluye con un α = 0.05 que existe suficiente evidencia para decir que las varianza de las poblaciones son diferentes.

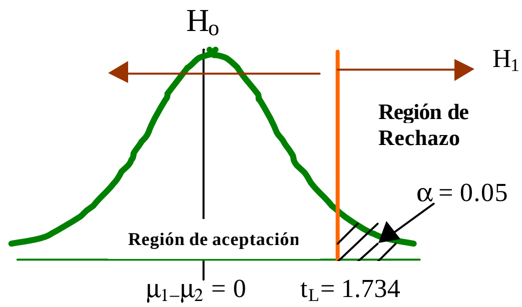
Con la decisión anterior se procede a comparar las medias:

Ensayo de Hipótesis
H_o; μ_2-μ_1=0
H_1; μ_2-μ_1 >0

Para poder buscar el valor de t en la tabla, se necesita saber el valor de los grados de libertad:

$$n = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\left[\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1-1)\right] + \left[\left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2-1)\right]} = \frac{\left(12^2/10 + 45^2/16\right)^2}{\left[\left(12^2/10\right)^2/(10-1)\right] + \left[\left(45^2/16\right)^2/(16-1)\right]} = 18.21$$

Este valor se redondea al próximo menor que sería 18.



Regla de decisión:
Si $t_R \leq 1.734$ No se rechaza H_o
Si $t_R > 1.734$ se rechaza H_o

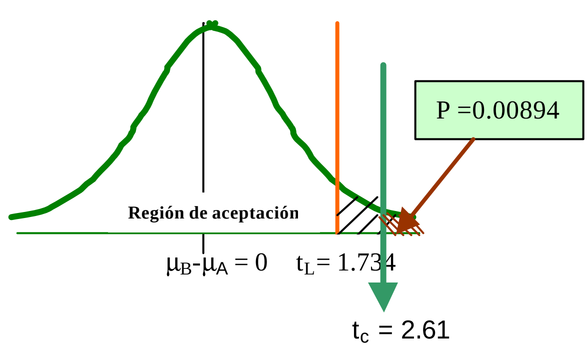
Cálculos:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(321 - 290) - 0}{\sqrt{\frac{12^2}{10} + \frac{45^2}{16}}} = 2.61$$

Justificación y decisión:

Como 2.61 es mayor que 1.734, se rechaza H_o y se concluye con un α=0.05, que existe evidencia suficiente para decir que el promedio de resistencia de los engranes del proveedor 2 es mayor a el promedio de resistencia de los engranes del proveedor 1.

Para calcular el valor de P se busca adentro de la tabla de t el valor de 2.61 con 18 grados de libertad y se observa que se encuentra entre dos áreas que son 0.01 y 0.0075, al interpolar nos da un valor de P = 0.00894.



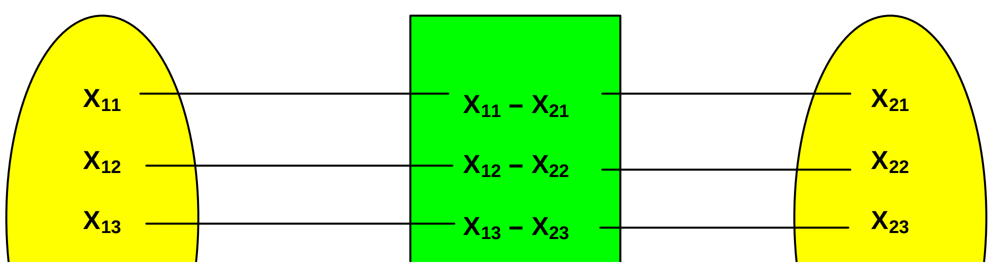
INFERENCIA RESPECTO A LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS CUANDO SE USAN MUESTRAS DEPENDIENTES PEQUEÑAS

Para hacer inferencias estadísticas sobre dos poblaciones, se necesita tener una muestra de cada población. Las dos muestras serán dependientes o independientes de acuerdo a la forma de seleccionarlas. Si la selección de los datos de una población no está relacionada con la de los datos de la otra, son muestras independientes. Si las muestras se seleccionan de manera que cada medida en una de ellas pueda asociarse naturalmente con una medida en la otra muestra, se llaman muestras dependientes. **Cada dato sale de alguna fuente; una** fuente **es algo, una persona o un objeto, que produce datos. Si dos medidas se obtienen de la misma fuente, se puede pensar que las medidas están pareadas. En consecuencia dos medidas que se obtienen del mismo conjunto de fuentes son dependientes. Note que si dos muestras son dependientes, entonces necesariamente tienen el mismo tamaño.**

Muchas aplicaciones prácticas requieren hacer comparaciones entre dos poblaciones con base en datos pareados o en muestras dependientes. Las aplicaciones que pueden involucrar muestras dependientes incluyen:

- ***Medicina*.-** Poner aprueba los efectos de una dieta mediante la obtención de las medidas del peso en la misma persona antes y después de aplicar una dieta.
- ***Enseñanza.-*** Probar la efectividad de una estrategia de enseñanza aplicando exámenes antes y después a los mismos individuos.
- ***Agricultura.***- Poner a prueba los efectos de dos fertilizantes en la producción de frijol de soya comparando la producción de parcelas similares en las mismas condiciones.
- ***Finanzas.***- Comparar las estimaciones de dos talleres de autos chocados para las mismas unidades.
- ***Industria.***- Poner a prueba dos marcas de llantas en cuanto al desgaste del piso colocando una de cada marca en los rines traseros de una muestra de coches del mismo tipo.

Si se tienen dos muestral aleatorias dependientes de tamaño *n*, donde cada elemento de la primera muestra es pareja de un elemento de la segunda, entonces estas dos muestras dan lugar a una de parejas o a una diferencias, como lo indica la siguiente figura. La muestra de diferencias $d = x_1 - x_2$ se puede pensar como una muestra de la población de diferencias de datos pareados de dos poblaciones. La media de la población de diferencias es igual a la diferencias de las medias poblacionales.



$$m_{x_1} - m_{x_2} = m_d = m_1 - m_2$$

Se puede demostrar que la media de las diferencias es la diferencias de las mismas considerando las dos poblaciones siguientes con cuyos elementos se han formado parejas:

	Población 1	Población 2	Diferencia *d*
	2	5	2 – 5 = -3
	4	6	4 – 6 = -2
	6	2	6 – 2 = 4
	8	4	8 – 4 = 4
	10	8	10 – 8 = 2
Suma	30	25	5
Media	6	5	1

La diferencia entre medias poblacionales es:

$$\mu_1 - \mu_2 = 6 - 5 = 1$$

y la media de la población de diferencias se representa:

$$m_d = \frac{\sum d}{N} = \frac{5}{5} = 1$$

En consecuencia se ve que la media de la población de diferencias es igual a la diferencia entre las medias poblacionales. Siguiendo la misma línea de razonamiento, se puede demostrar que, para dos muestras dependientes, la media de sus diferencias muestrales es igual a la diferencia entre sus medias muestrales. Esto es, si $x_1 - x_2 = d$, entonces

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{d}.$$

Si se tiene una muestra aleatoria de *n* pares de datos y si las diferencias *d* se distribuyen normalmente, entonces el estadístico:

$\dfrac{\bar{d} - m_d}{s_d / \sqrt{n}}$ **tiene una distribución muestral que es una distribución t con gl=n-1, donde s_d representa la desviación estándar de la muestra de puntajes diferencia.**

Estadístico

$$t = \frac{\bar{d} - m_d}{s_d / \sqrt{n}}$$

donde g.l = n-1

Límites del intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ cuando se usa muestras dependientes

$$m_1 - m_2 = \bar{d} \pm t \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Ejemplos:

1. Se hizo un estudio para definirse si los ejercicios aeróbicos reducen el ritmo cardiaco de una persona durante el descanso, y al examinar a diez voluntarios antes y después de seguir un programa de ese tipo durante seis meses, sus pulsaciones, en latidos por minuto, dieron los siguientes registros:

Voluntario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes	**73**	**77**	**68**	**62**	**72**	**80**	**76**	**64**	**70**	**72**
Después	**68**	**72**	**64**	**60**	**71**	**77**	**74**	**60**	**64**	**68**

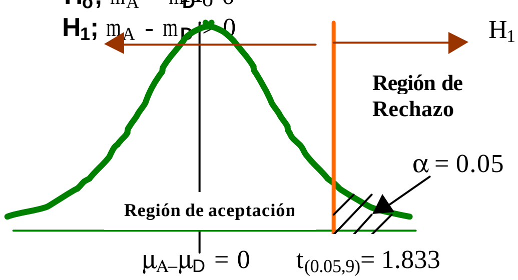
Use a = 0.05 para calcular si los ejercicios aeróbicos reducen el ritmo cardiaco durante el reposo. Calcule el valor de P.

Solución:

Ensayo de hipótesis:

H_o; $m_A - m_D = 0$

H_1; $m_A - m_D > 0$



Regla de decisión:

Si $t_R \leq 1.833$ No se rechaza H_o

Si $t_R > 1.833$ se rechaza H_o

Cálculos:

Se procederá a calcular las diferencias de cada par:

Voluntario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes	**73**	**77**	**68**	**62**	**72**	**80**	**76**	**64**	**70**	**72**
Después	**68**	**72**	**64**	**60**	**71**	**77**	**74**	**60**	**64**	**68**
Diferencia	**5**	**5**	**4**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**6**	**4**

Al calcular la media de las diferencias nos da 3.6 con una s_d = 1.58.

$$t = \frac{\bar{d} - m_d}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{3.6 - 0}{1.58 / \sqrt{10}} = 7.20$$

Justificación y decisión:

Como 7.20 es mayor que 1.833, se rechaza H_0, y se concluye cn un nivel de significancia de 0.05 que los datos indican que los ejercicios aeróbicos disminuyen significativamente el ritmo cardiaco durante el reposo.

Para calcular el valor de P se busca el 7.20 en el renglón de 9 grados de libertad en la tabla t, y se observa que el valor mayor que aparece en dicha tabla es 4.781 al cual le

corresponde una área a la derecha de 0.0005, entonces se puede concluir que el valor de P es prácticamente cero**.**

2. Diez hombres se sometieron a una dieta especial registrando sus pesos antes de comenzarla y después de un mes de estar en ella. Los resultados de los pesos, en libras, se muestran a continuación:

Hombre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Antes	**181**	**172**	**190**	**186**	**210**	**202**	**166**	**173**	**183**	**184**
Después	**178**	**175**	**185**	**184**	**207**	**201**	**160**	**168**	**180**	**189**

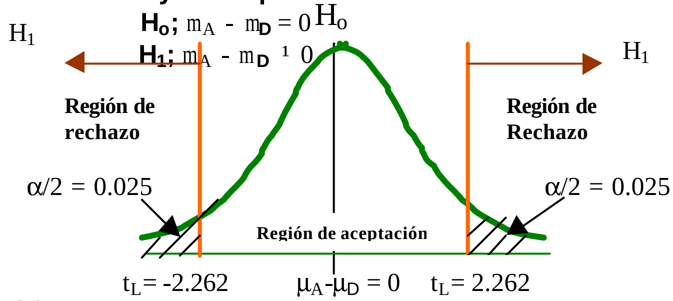
Haga una prueba con a **= 0.05 para determinar si la dieta logró alguna diferencia, ya sea positiva o negativa. Calcule el valor de P.**

Solución:

Ensayo de hipótesis:

H_o; $m_A - m_D = 0$

H_1; $m_A - m_D$ ¹ 0



Regla de decisión:

Si –2.262 ≤ t_c ≤ 2.262 No se rechaza H_o,

Si la t_c < -2.262 ó si t_c > 2.262 se rechaza H_o.

Cálculos:

Se procederá a calcular las diferencias de cada par:

Hombre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Antes	**181**	**172**	**190**	**186**	**210**	**202**	**166**	**173**	**183**	**184**
Después	**178**	**175**	**185**	**184**	**207**	**201**	**160**	**168**	**180**	**189**
Diferencia	**3**	**-3**	**5**	**2**	**3**	**1**	**6**	**5**	**3**	**-5**

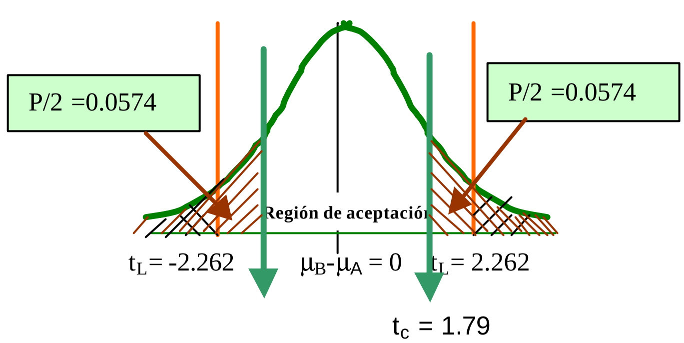
Al calcular la media de las diferencias nos da 2 con una s_d = 3.53.

$$t = \frac{\bar{d} - m_d}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{2-0}{3.53/\sqrt{10}} = 1.79$$

Justificación y decisión:

Como 1.79 está entre los dos valores críticos de –2.262 y 2.262, por lo tanto no se rechaza H_0, y se concluye con un a **= 0.05 que no existe evidencia estadística que apoye la efectividad de la dieta para variar el peso.**

Para calcular el valor de P se interpola entre 0.10 y 0.05, con 9 grados de libertad obteniendo un área de 0.0574, pero como el ensayo es bilateral este sería un valor de P/2, por lo tanto el valor de P = (2)(0.0574) = 0.1148



3. Calcula el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias poblacionales del ejercicio anterior.

Solución:

$$m_A - m_D = \bar{d} \pm t\frac{s_d}{\sqrt{n}} = 2 \pm 2.262\frac{3.53}{\sqrt{10}}$$

El intervalo de confianza del 95% es –0.53 y 4.53 y como contiene a cero, no podemos concluir que la dieta sea efectiva para cambiar el peso.

Ejercicios Para la Unidad III

1. Un economista considera que el número de galones de gasolina que consume mensualmente cada automóvil en Estados Unidos es una variable aleatoria normal con μ=50 y varianza desconocida.
   a) Supóngase que una muestra aleatoria de nueve observaciones presenta una varianza muestral de 36. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea mayor que 54?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que 44?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que x este comprendida entre 44 y 55 ?
   d) ¿Cómo modificarían las respuestas a las preguntas anteriores si n = 36 ?

2. Una máquina produce las varillas de metal utilizadas en el sistema de suspensión de un automóvil. El diámetro de la varilla está distribuido en forma normal, con media y varianza desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 10 piezas, y se encuentra que los diámetros son: 2.25, 2.24, 2.27, 2.26, 2.23, 2.25, 2.24, 2.27, 2.22 y 2.23 pulgadas. Encuentre el intervalo de confianza del 99% para el diámetro promedio de todas las varillas de metal.

3. Una muestra de 12 latas de sopa producida por cierta compañía produjo los siguientes pesos netos, medidos en onzas:

11.9	12.2	11.6	12.1	12.1	11.8
11.9	11.8	12.0	12.3	11.8	12.0

   Si se supone normalidad en los pesos, construya un intervalo de confianza del 95% para el peso promedio de todas las latas de sopa producidas por la compañía.

4. Los siguientes datos registrados en días, representan el tiempo de recuperación para pacientes que se tratan al azar con uno de los medicamentos para curar infecciones graves de la vejiga:

Medicamento 1	**Medicamento 2**
$n_1 = 14$	$n_2 = 16$
$x_1 = 17$	$x_2 = 19$
$s_1^2 = 1.5$	$s_2^2 = 1.8$

   Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia promedio en el tiempo de recuperación para los dos medicamentos, suponga poblaciones normales con varianzas iguales.

5. Un experimento compara las economías en combustible para dos tipos de camiones compactos a diesel equipados de forma similar. Suponga que se utilizaron 12 camiones Volkswagen y 10 Toyota en pruebas de velocidad constante de 90 kilómetros por hora. Si los 12 VW promedian 16 Km/lto con una desviación estándar de 1.0 km/lto, y los 10 Toyota

promedian 11 km/lto con una desviación estándar de 0.8 km/lto, construya un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre los kilómetros promedio por litro de estos dos camiones. Suponga poblaciones normales con varianzas iguales.

6. Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones, de una población normal con varianza $\sigma^2 = 6$, tenga una varianza s^2
   a) Mayor que 9.1
   b) Entre 3.462 y 10.745

7. Encuentre el intervalo de confianza del 90% para la varianza del diámetro de las varillas del ejercicio 2 e interprete resultado.

8. Una máquina que produce bolas para cojinetes se le detiene periódicamente para verificar el diámetro. En este caso en particular no interesa el diámetro medio, sino la variabilidad de los diámetros. Supóngase que se toma una muestra de 31 bolas y se encuentra que la varianza de los diámetros es de 0.94 mm^2. Construya un intervalos de confianza de 95% para la varianza, e interprete los resultados, suponiendo normalidad en la población.

9. Si s_1^2 y s_2^2 representan las varianzas de muestras aleatorias independientes de tamaño n_1=8 y n_2=12, tomadas de poblaciones normales con varianzas iguales, encuentre $P(s_1^2/s_2^2<4.89)$.

10. Los siguientes datos representan los tiempos de duración de las películas que producen dos compañías cinematográficas.

Compañía	**Tiempo (minutos)**
I	103 94 110 87 98
II	97 82 123 92 175 88 118

    Construya un intervalo de confianza del 90% para la relación de varianzas.

11. Construya un intervalo de confianza de 98% para la relación de desviaciones estándar del problema número 5, y de acuerdo con los resultados obtenidos, diga si estuvo bien el supuesto de varianzas iguales.

12. Pruebe la hipótesis de que el contenido promedio de los envases de un lubricante en particular es de 10 litros si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son: 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3 y 9.8 litros. Utilice un nivel de significancia de 0.01 y suponga que la distribución del contenido es normal.

13. De acuerdo con un estudio dietético una ingesta alta de sodio se puede relacionar con úlceras, cáncer de estómago y migraña. El requerimiento humano de sal es de sólo 220 miligramos por día, el cual se rebasa en la mayoría de las porciones individuales de cereales listos para comerse. Si una muestra aleatoria de 20 porciones similares de Special K tiene un contenido medio de 244 miligramos de sodio y una desviación estándar de 24.5 miligramos ¿esto sugiere, en el nivel de significancia del 0.05, que el contenido promedio de sodio para porciones individuales de Special K es mayor que 220 miligramos? Suponga que la distribución de contenidos de sodio es normal.

14. Una compañía armadora de automóviles grandes trata de decidir si compra llantas de la marca o de la B para sus modelos nuevos. Se lleva a cabo un experimento para ayudar a llegar a una decisión, en el que se usan 12 llantas de cada marca. Los resultados son:

Marca A:	xA = 37,900 Kilómetros
	SA = 5,100 Kilómetros.
Marca B:	xB = 39,800 Kilómetros
	SB = 5,900 Kilómetros

    Pruebe la hipótesis de que no hay diferencia en las dos marcas de llantas con un nivel de significancia de 0.05. También calcule el valor de P, suponiendo normalidad y varianzas iguales.

15. Dos secciones de un curso de estadística son sometidas a un mismo examen final. De las calificaciones obtenidas se extrae una muestra aleatoria de tamaño 9 en la grupo "A", y otra de tamaño 4 en el grupo "B".

Grupo "A"	65	68	72	75	82	85	87	91	95
Grupo "B"	50	59	71	80					

a) Con un nivel de significación de 0.05 ¿podría decirse que los dos grupos tienen las mismas calificaciones promedio?. Suponga que provienen de poblaciones normales con varianzas iguales.
b) Calcule el valor de P para este ensayo e interprete su resultado
c) Por medio de un ensayo de hipótesis diga si estuvo acertada la suposición de las varianzas iguales en el inciso a). Haga la prueba con un nivel de significación de 0.10.

16. Una máquina automática empacadora de azúcar se usa para llenar bolsas de 5 libras. Una muestra aleatoria de 15 bolsas indicó una media de 4.94 libras y una desviación estándar de 0.02; si se supone que la distribución de los pesos es normal, y de la experiencia pasada se sabe que la desviación estándar de los pesos es de 0.015 libras, ¿muestran los datos suficiente evidencia para decir que hubo un aumento en la variabilidad?. Haga la prueba con un nivel de significancia del 0.05 y calcule el valor de P.

17. Una empresa empacadora de azúcar está considerando una máquina nueva para reemplazar su máquina actual. Los pesos de una muestra de 21 paquetes de 5 libras empacados por la máquina vieja producen una varianza de 0.16, mientras que los pesos de 20 paquetes de 5 libras empacados por la máquina nueva dan una varianza de 0.09.En base a estos datos, ¿aconsejaría usted al gerente a comprar la máquina nueva? Use un $\alpha = 0.05$.

18. La Metro Bus Company en una ciudad grande afirma tener una varianza en los tiempos de llegada de sus carros, medidos en minutos, a las distintas paradas, de no más de 5; un ejecutivo de la compañía ordenó tomar los tiempos de llegada en varias paradas para determinar si los conductores están cumpliendo con sus horarios. Si una muestra de 12 llegadas a una parada particular produjo una varianza de 5.7 y se supone que los tiempos de llegada se distribuyen normalmente, ¿muestran estos datos suficiente evidencia para contradecir a la compañía? Use un nivel de significancia de 0.10 y calcule el valor de P.

Respuesta a los Ejercicios de la Unidad III

1. a) 0.0421, b) 0.00862, c) 0.97276
2. $2.2284 \le \mu \le 2.2635$
3. $11.859 \le \mu \le 12.11$
4. $0.70 \le \mu_2 - \mu_1 \le 3.30$
5. $4.3 \le \mu_{W} - \mu_T \le 5.7$
6. a) 0.05, b) 0.94
7. $4.689 \times 10^{-5} \le \sigma^2 \le 1.559 \times 10^{-4}$
8. $0.60 \le \sigma^2 \le 1.679$
9. 0.99
10. $2.20 \le (\sigma_2/\sigma_1)^2 \le 61.50$
11. $0.549 \le (\sigma_{Vw}/\sigma_T) \le 2.69$. Estuvo bien la suposición puesto que el uno esta dentro del intervalo.
12. Región crítica $-3.25 \le t \le 3.25$. $t = 0.77$ por lo tanto no rechaza Ho.
13. Región crítica $t>1.729$. $t= 4.30$ rechazar Ho.
14. Región crítica $-2.074 \le t \le 2.074$. $t = -0.84$ no rechazar Ho. $P = 0.411$

15. a) Región crítica $-2.201 \le t \le 2.201$. $t = 2.27$ rechazar Ho. b) $P = 0.0445$
    c) Región crítica $0.1129 \le F \le 4.07$. $F = 1.578$, no rechaza Ho, estuvo bien la suposición de varianzas iguales.
16. Región crítica $X^2 > 23.685$. $X^2 = 24.88$ rechazar Ho. $P = 0.0377$
17. Región critica $F > 2.16$. $F = 1.77$, no se rechaza Ho y no conviene comprar la máquina nueva.
18. Región crítica $X^2 > 17.275$. $X^2 = 12.54$ no se rechaza Ho. $P = 0.3280$

UNIDAD IV

PREUBAS CHI-CUADRADA Y ESTADISTICA NO PARAMETRICA

Como ya se ha visto varias veces, los resultados obtenidos de muestras no siempre concuerdan exactamente con los resultados teóricos esperados, según las reglas de probabilidad. Por ejemplo, aunque consideraciones teóricas conduzcan a esperar 50 caras y 50 cruces cuando se lanza 100 veces una moneda bien hecha, es raro que se obtengan exactamente estos resultados.

Supóngase que en una determinada muestra se observan una serie de posibles sucesos E_1, E_2, E_3, . . . , E_K, que ocurren con frecuencias o_1, o_2, o_3, . . ., o_K, llamadas ***frecuencias observadas*** y que, según las reglas de probabilidad, se espera que ocurran con frecuencias e_1, e_2, e_3, . . . ,e_K llamadas ***frecuencias teóricas o esperadas.***

A menudo se desea saber si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas. Para el caso en que solamente son posibles dos sucesos E_1 y E_2 como, por ejemplo, caras o cruces, defectuoso, etc., el problema queda resuelto satisfactoriamente con los métodos de las unidades anteriores. En esta unidad se considera el problema general.

Definición de X^2

Una medida de la discrepancia existente entre las frecuencias observadas y esperadas es suministrada por el estadístico X^2, dado por:

$$X^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \ldots + \frac{(o_k - e_K)}{e_K} = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$$

donde si el total de frecuencias es N,

$$\sum o_j = \sum e_j = N$$

Si $X^2 = 0$, las frecuencias observadas y esperadas concuerdan exactamente, mientras que si $X^2 > 0$, no coinciden exactamente. A valores mayores de X^2, mayores son las discrepancias entre las frecuencias observadas y esperadas.
Si las frecuencias esperadas son al menos iguales a 5, la aproximación mejora para valores superiores.

El número de grados de libertad ν está dado por:

$$\nu = k - 1 - m$$

en donde:
K = número de clasificaciones en el problema.
m = número de parámetros estimados a partir de los datos muestrales para obtener los valores esperados.

Ensayo de Hipótesis

En la práctica, las frecuencias esperadas se calculan de acuerdo con la hipótesis H_o. Si bajo esta hipótesis el valor calculado de X^2 dado es mayor que algún valor crítico, se deduce que las frecuencias observadas difieren *significativamente* de las esperadas y se rechaza H_o al nivel de significación correspondiente. En caso contrario, no se rechazará. Este procedimiento se llama *ensayo* o *prueba de chi-cuadrado* de la hipótesis.

Debe advertirse que en aquellas circunstancias en que X^2 esté *muy próxima a cero* debe mirarse con cierto recelo, puesto que es raro que las frecuencias observadas concuerden demasiado bien con las esperadas. Para examinar tales situaciones, se puede determinar si el valor calculado de X^2 es menor que las X^2 críticas o de tabla (ensayo unilateral izquierdo), en cuyos casos se decide que la concordancia es *bastante buena*.

Ejemplos:

1. La siguiente tabla muestra las frecuencias observadas al lanzar un dado 120 veces. Ensayar la hipótesis de que el dado está bien hecho al nivel de significación del 0.05.

Cara	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Frecuencia Observada	25	17	15	23	24	16

Solución:

Ensayo de Hipótesis:

H_o; Las frecuencias observadas y esperadas son significativamente iguales (dado bien hecho)

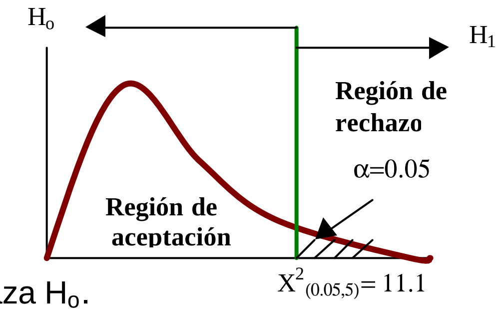
H_1; Las frecuencias observadas y esperadas son diferentes (dado cargado).

Primero se procede a calcular los valores esperados. Como es bien sabido por todos la probabilidad de que caiga cualquier número en un dado no cargado es de 1/6. Como la suma de los valores observados es de 120, se multiplica este valor por 1/6 dando un resultado de 20 para cada clasificación.

Cara	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
Frecuencia Observada	25	17	15	23	24	16	120
Frecuencia esperada	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	

Grados de libertad = k-1-m = 6-1-0 = 5

No se tuvo que calcular ningún parámetro para obtener las frecuencias esperadas.



Regla de decisión:

Si $X^2_R \leq 11.1$ no se rechaza H_o.

Si X^2_R >11.1 se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{(25-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} = 5$$

Justificación y decisión:
Como 5 es menor a 11.1 no se rechaza H_o y se concluye con una significación de 0.05 que el dado está bien hecho.

2. En los experimentos de Mendel con guisantes, observó 315 lisos y amarillos, 108 lisos y verdes, 101 rugosos y amarillos y 32 rugosos y verdes. De acuerdo con su teoría, estos números deberían presentarse en la proporción 9:3:3:1. ¿Hay alguna evidencia que permita dudar de su teoría al nivel de significación del 0.01?

Solución:
Ensayo de Hipótesis:
H_o; La teoría de Mendel es acertada.
H_1; La teoría de Mendel no es correcta.

El número total de guisantes es 315+108+101+32=556. Puesto que los números esperados están el la proporción 9:3:3:1 (9+3+3+1=16), se esperaría:

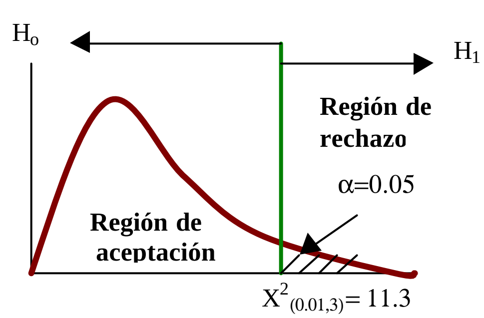
$\frac{9}{16}(556) = 312.75$ lisos y amarillos

$\frac{3}{16}(556) = 104.25$ lisos y verdes

$\frac{3}{16}(556) = 104.25$ rugosos y amarillos

$\frac{1}{16}(556) = 34.75$ rugosos y verdes

Grados de libertad = k-1-m = 4-1-0 = 3
No se tuvo que calcular ningún parámetro para obtener las frecuencias esperadas.



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 11.3$ no se rechaza H_o.

Si $X^2_R > 11.3$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{(315-312.75)^2}{312.75} + \frac{(108-104.25)^2}{104.25} + \frac{(101-104.25)^2}{104.25} + \frac{(32-34.75)^2}{34.75} = 0.470$$

Justificación y decisión:

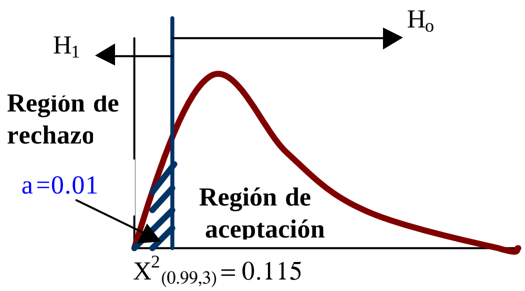
Como 0.470 es menor que 11.3 no se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significación de 0.01 que la teoría de Mendel es correcta.

Como el valor de 0.470 está cercano a cero, se procede a hacer un ensayo unilateral izquierdo:

Ensayo de Hipótesis:

H_0; La teoría de Mendel es acertada.

H_1; La teoría de Mendel es muy acertada.



Regla de decisión:

Si $X^2_R \geq 0.115$ no se rechaza H_o.

Si $X^2_R < 0.115$ se rechaza H_o.

Como el valor de 0.470 no es menor a 0.115 se concluye que el experimento o la teoría de Mendel solo es buena.

3. Una encuesta sobre 320 familias con 5 niños dio la distribución que aparece en la siguiente tabla. ¿Es el resultado consistente con la hipótesis de que el nacimiento de varón y hembra son igualmente posibles? Use $\alpha = 0.05$.

Número de niños **Número de niñas**	**5** **0**	**4** **1**	**3** **2**	**2** **3**	**1** **4**	**0** **5**
Número de familias	18	56	110	88	40	8

Solución:

Ensayo de hipótesis:

H_0; El nacimiento de niños y niñas es igualmente probable.

H_1; El nacimiento de niños y niñas no es igualmente probable.

Este experimento tiene un comportamiento binomial, puesto que se tienen dos posibles resultados y la probabilidad de éxito se mantiene constante en todo el experimento.

Se le llamará éxito al nacimiento de un varón o niño. Por lo que la variable aleatoria "x" tomará valores desde 0 hasta 5.
Como se quiere ver si es igualmente probable el nacimiento de niños y niñas, la probabilidad de éxito será de 0.5.
Utilizando la fórmula de la distribución binomial se calcularán las probabilidades, que multiplicadas por el número total de familias nos darán los valores esperados en cada clasificación.

Recordando la fórmula de la distribución binomial:

$$ {}_nC_x\, p^x q^{(n-x)} $$

en donde n = 5 y "x" es el número de niños .

Probabilidad de 5 niños y 0 niñas = ${}_5C_5(0.5)^5(0.5)^{(5-5)} = \frac{1}{32}$

Probabilidad de 4 niños y 1 niña = ${}_5C_4(0.5)^4(0.5)^{(5-4)} = \frac{5}{32}$

Probabilidad de 3 niños y 2 niñas = ${}_5C_3(0.5)^3(0.5)^{(5-3)} = \frac{10}{32}$

Probabilidad de 2 niños y 3 niñas = ${}_5C_2(0.5)^2(0.5)^{(5-2)} = \frac{10}{32}$

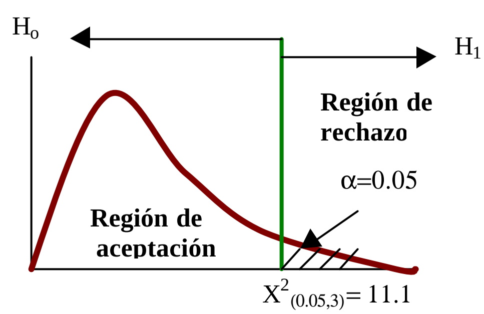
Probabilidad de 1 niño y 4 niñas = ${}_5C_1(0.5)^1(0.5)^{(5-1)} = \frac{5}{32}$

Probabilidad de 0 niños y 5 niñas = ${}_5C_0(0.5)^0(0.5)^{(5-0)} = \frac{1}{32}$

Si cada una de estas probabilidades se multiplican por 320 se obtienen los valores esperados:

Número de niños **Número de niñas**	**5** **0**	**4** **1**	**3** **2**	**2** **3**	**1** **4**	**0** **5**	**Total**
Número de familias	18	56	110	88	40	8	**320**
Frecuencias esperadas	**10**	**50**	**100**	**100**	**50**	**10**	

Grados de libertad: k-1-m = 6-1-0 = 5



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 11.1$ no se rechaza H_o.

Si $X^2_R > 11.1$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{(18-10)^2}{10} + \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(110-100)^2}{100} + \frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(8-10)^2}{10} = 12$$

Justificación y decisión:
Como el 12 es mayor a 11.1, se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que el nacimiento de hombres y mujeres no es igualmente probable.

4. Una urna contiene 6 bolas rojas y 3 blancas. Se extraen al azar dos bolas de la urna, se anota su color y se vuelven a la urna. Este proceso se repite un total de 120 veces y los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla. Determinar al nivel de significación del 0.05 si los resultados obtenidos son consistentes con los esperados.

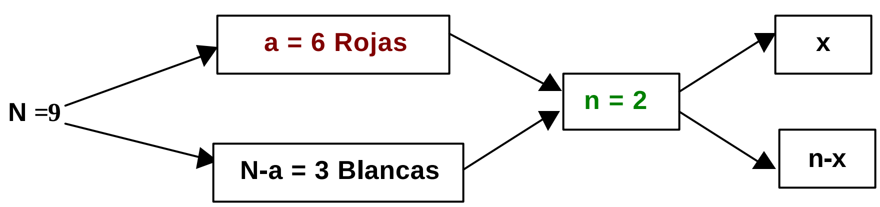
	0	**1**	**2**
Bolas blancas	**2**	**1**	**0**
Número de extracciones	6	53	61

Solución:
Este experimento tiene las características de una distribución hipergeométrica, por lo cual se calcularán los valores esperados con el razonamiento de esta distribución.
Se llamara "x" a la variable aleatoria de interés que en este caso serán las bolas rojas. Por lo tanto "x" puede tomar valores desde 0 hasta 2.

La fórmula de la distribución hipergeométrica es:

$$\frac{{}_aC_x \cdot {}_{(N-a)}C_{(n-x)}}{{}_NC_n}$$

Se tiene:



Probabilidad de extraer 0 rojas y 2 blancas:

$$P(x=0)=\frac{({}_6C_0)({}_3C_2)}{{}_9C_2}=\frac{3}{36}$$

Probabilidad de extraer 1 roja y 1 blanca:

$$P(x=1)=\frac{({}_6C_1)({}_3C_1)}{{}_9C_2}=\frac{18}{36}$$

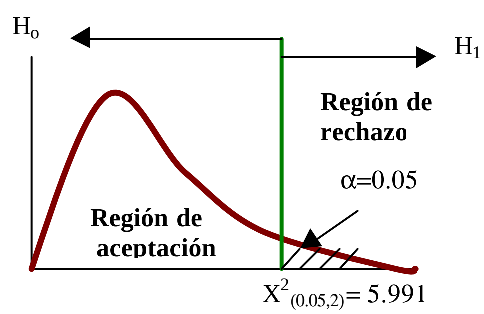
Probabilidad de extraer 2 rojas y 0 blancas:

$$P(x=2)=\frac{({}_6C_2)({}_3C_0)}{{}_9C_2}=\frac{15}{36}$$

Con las probabilidades anteriores se obtendrán los valores esperados multiplicando por 120.

	0	**1**	**2**
Bolas blancas	**2**	**1**	**0**
Número de extracciones	6	53	61
Frecuencias esperadas	**10**	**60**	**50**

Grados de libertad: k-1-m = 3-1-0 = 2



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 5.991$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 5.991$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2=\sum_{j=1}^{K}\frac{(o_j-e_j)^2}{e_j}=\frac{(6-10)^2}{10}+\frac{(53-60)^2}{60}+\frac{(61-50)^2}{50}=4.83$$

Justificación y decisión:

Como el 4.83 no es mayor a 5.991, no se rechaza H_0 y se concluye con un α = 0.05 que los resultados son los mismos que los esperados.

PRUEBA CHI-CUADRADA PARA LA BONDAD DEL AJUSTE

A lo largo de este curso nos ocupamos de la prueba de hipótesis estadísticas acerca de parámetros de una población como μ, σ y P. Ahora se considera una prueba para determinar si una población tiene una distribución teórica específica. La prueba se basa en qué tan buen ajuste se tiene entre la frecuencia de ocurrencia de las observaciones en una muestra observada y las frecuencias esperadas que se obtienen a partir de la distribución hipotética.

La formula que se utilizará para calcular el valor de chi-cuadrada es igual a la de la sección anterior, con el mismo concepto de grados de libertad.

Ejemplo:

1. Una moneda fue lanzada al aire 1000 series, de 5 veces cada serie y se observó el número de caras de cada serie. El número de series en los que se presentaron 0, 1, 1, 3, 4 y 5 caras se muestra en la siguiente tabla.

Número de caras	**Número de series (frecuencia observada)**
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
Total	**1000**

Ajustar una ***distribución binomial*** a los datos con un α = 0.05.

Solución:

H_0; Los datos se ajustan a una distribución binomial.

H_1; Los datos no se ajustan a una distribución binomial.

Para obtener los valores esperados se tiene que utilizar la formula de la distribución binomial: ${}_nC_x\, p^x q^{(n-x)}$, donde n en este ejercicio vale 5, p y q son las probabilidades respectivas de cara y sello en un solo lanzamiento de la moneda. Para calcular el valor de p, se sabe que μ=np en una distribución binomial, por lo que μ = 5p.

Para la distribución de frecuencias observada, la media del número de caras es:

$$m = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{(38)(0)+(144)(1)+(342)(2)+(287)(3)+(164)(4)+(25)(5)}{1000} = \frac{2470}{1000} = 2.47$$

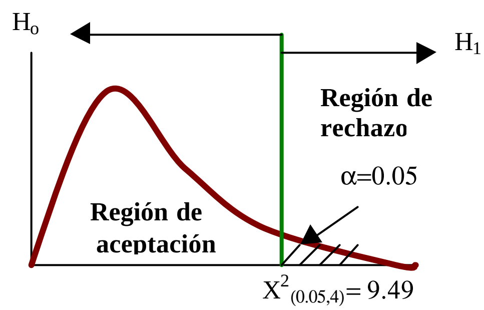
Por lo tanto $p = \frac{m}{5} = \frac{2.47}{5} = 0.494$. Así pues, la distribución binomial ajustada viene dada por p(x) = ${}_5C_x(0.494)^x(0.506)^{(5-x)}$.

Al seguir esta fórmula se calcula la probabilidad de obtener caras, según el valor de la variable aleatoria. La probabilidad multiplicada por 1000 nos dará el valor esperado. Se resumen los resultados en la tabla siguiente:

Número de caras (x)	P(x caras)	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
0	0.0332	33.2	38
1	0.1619	161.9	144
2	0.3162	316.2	342
3	0.3087	308.7	287
4	0.1507	150.7	164
5	0.0294	29.4	25

Para los grados de libertad el valor de *m* será uno, ya que se tuvo que estimar la media de la población para poder obtener el valor de *p* y así poder calcular los valores esperados.

Grados de libertad: k-1-m = 6-1-1 = 4



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 9.49$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 9.49$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{(38-33.2)^2}{33.2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7} + \frac{(25-29.4)^2}{29.4} = 7.54$$

Justificación y decisión:
Como el 7.54 no es mayor a 9.49, no se rechaza H_0 y se concluye con un α = 0.05 que el ajuste de los datos a una distribución binomial es bueno.

2. Se propone que el número de defectos en las tarjetas de circuito impreso sigue una distribución Poisson. Se reúne una muestra aleatoria de 60 tarjetas

de circuito impreso y se observa el número de defectos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Número de defectos	Frecuencia observada
0	32
1	15
2	9
3 ó más	4

¿Muestran estos datos suficiente evidencia para decir que provienen de una distribución Poisson?. Haga la prueba de la bondad del ajuste con un α = 0.05.

Solución:

H_0; La forma de la distribución de los defectos es Poisson.

H_1; La forma de la distribución de los defectos no es Poisson.

La media de la distribución Poisson propuesta en este ejemplo es desconocida y debe estimarse a partir de los datos contenidos en la muestra.

$$m = l = \frac{(32)(0)+(15)(1)+(9)(2)+(4)(3)}{60} = 0.75$$

A partir de la distribución Poisson con parámetro 0.75, pueden calcularse las probabilidades asociadas con el valor de x. Esto es la fórmula de la Poisson es:

$$P(x) = \frac{e^{-l}\, l^{x}}{x!} = \frac{e^{-0.75}\, 0.75^{x}}{x!}$$

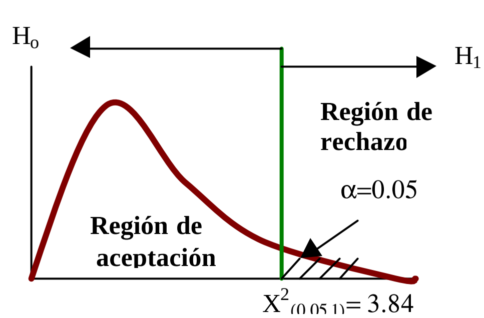
Con esta fórmula se calculan las probabilidades, mismas que se multiplican por 60 para obtener los valores esperados.

Número de defectos	Probabilidad	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
0	0.472	28.32	32
1	0.354	21.24	15
2	0.133	7.98	9
3 ó más	0.041	2.46	4

Puesto que la frecuencia esperada en la última celda es menor que 5, se combinan las dos últimas celdas.

Número de defectos	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
0	28.32	32
1	21.24	15
2 ó más	10.44	13

Los grados de libertad serían 3-1-1=1, debido a que la media de la distribución Poisson fue estimada a partir de los datos.



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 3.84$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 3.84$ se rechaza H_o.

Cálculos:

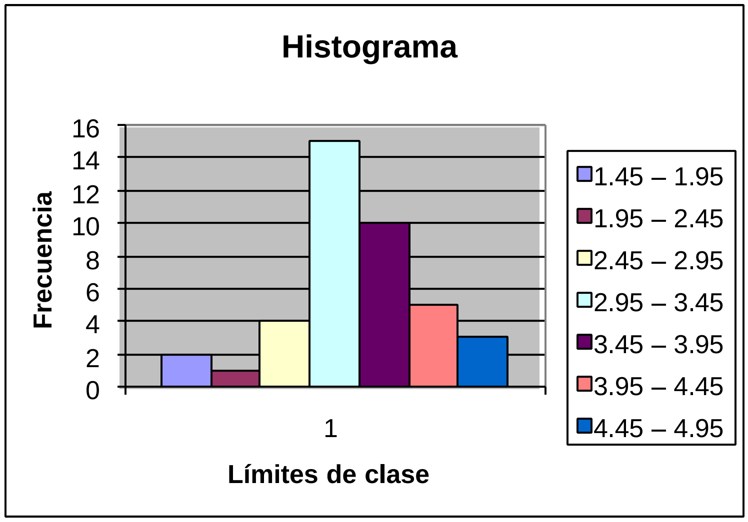
$$X^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{(32 - 28.32)^2}{28.32} + \frac{(15 - 21.24)^2}{21.24} + \frac{(13 - 10.44)^2}{10.44} = 2.94$$

Justificación y decisión:
Como el 2.94 no es mayor a 3.84, no se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que la distribución de defectos en las tarjetas de circuito impreso es Poisson.

3. Pruebe la hipótesis de que la distribución de frecuencia de las duraciones de baterías dadas en la siguiente tabla, se puede aproximar mediante una distribución normal con media $\mu = 3.5$ y desviación estándar $\sigma=0.7$. Utilice un $\alpha = 0.05$.

Límites de clase	**Frecuencias observadas**
1.45 – 1.95	2
1.95 – 2.45	1
2.45 – 2.95	4
2.95 – 3.45	15
3.45 – 3.95	10
3.95 – 4.45	5
4.45 – 4.95	3

Solución:
Se procede a elaborar el histograma, para visualizar los datos:



Como se puede observar el histograma tiene una forma que aparenta ser normal, se probará esta hipótesis.

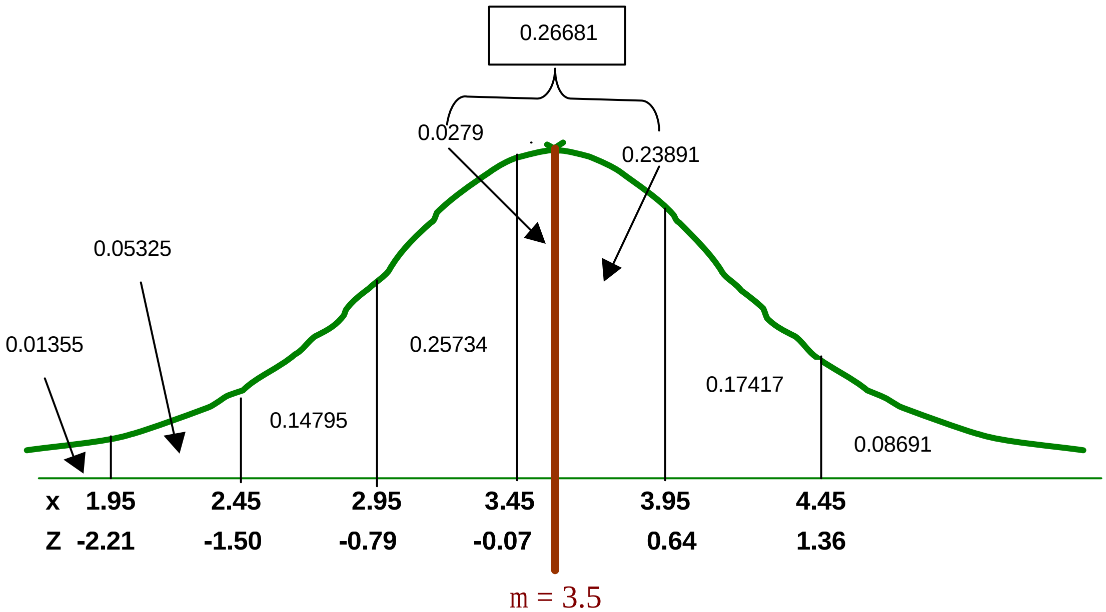
H_0; Los datos provienen de una distribución normal.
H_1; Los datos no provienen de una distribución normal.

En este ejercicio en particular se cuenta con la media y desviación estándar de la población, por lo que no se tiene que estimar. En caso de que no se tuviera, se estimarían a partir de los datos agrupados con las fórmulas que se vieron en la Unidad III del curso de probabilidad y estadística, tomando en cuenta que para los grados de libertad el valor de *m* sería 2, ya que se estimaría la media y la desviación estándar.
Se procederá a calcular los valores de z para encontrar las probabilidades en la tabla. Recordando que $z = \frac{x-m}{s}$, se sustituye el valor de x por los límites de clase comenzando con el límite de 1.95

Límite real	$z = \frac{x-3.5}{0.7}$	**P(x)**
1.95	-2.21	P(x≤1.95) = 0.01355
2.45	-1.50	P(x≤2.45) = 0.06680
2.95	-0.79	P(x≤2.95) = 0.21476
3.45	-0.07	P(x≤3.45) = 0.47210
3.95	0.64	P(x≥3.95) = 0.26109
4.45	1.36	P(x≥4.45) = 0.08691

La razón por la cual se comienza con el límite de 1.95 y se termina con el límite de 4.45, es porque la suma de todas las probabilidades debe ser 1, bajo la curva normal.
A continuación se muestra la curva normal con sus respectivas probabilidades, según los limites reales. Las probabilidades que no se

muestran en la tabla anterior y están en la curva se calcularon por diferencias.

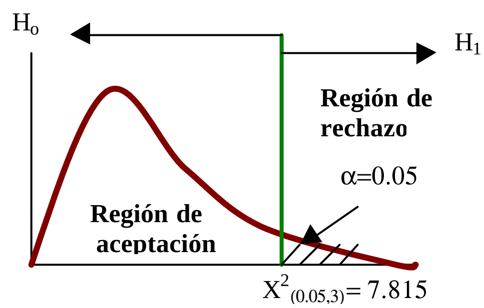


$P(1.95 \leq x \leq 2.45) = 0.0668 - 0.013553 = 0.053254$
$P(2.45 \leq x \leq 2.95) = 0.21476 - 0.0668 = 0.147953$
$P(2.95 \leq x \leq 3.45) = 0.4721 - 0.21476 = 0.25734$
$P(3.45 \leq x \leq 3.50) = 0.50 - 0.4721 = 0.0279$
$P(3.50 \leq x \leq 3.95) = 0.50 - 0.26109 = 0.23891$
$P(3.95 \leq x \leq 4.45) = 0.26109 - 0.086915 = 0.17417$

Con estas probabilidades se calcularán los valores esperados, multiplicando cada probabilidad por 40.

Límites de clase	Frecuencias observadas		Probabilidad	Frecuencia esperada	
1.45 – 1.95		2	0.01355	0.54212	
1.95 – 2.45	7	1	0.05325	2.13016	8.5905
2.45 – 2.95		4	0.14795	5.91812	
2.95 – 3.45		15	0.25734	10.29360	
3.45 – 3.95		10	0.26681	10.67240	
3.95 – 4.45	8	5	0.17417	6.96680	10.4434
4.45 – 4.95		3	0.08691	3.47660	

Grados de libertad: k-1-m = 4-1-0 = 3



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 7.815$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 7.815$ se rechaza H_o.

Cálculos:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \frac{(7-8.5904)^2}{8.5904} + \frac{(15-10.2936)^2}{10.2936} + \frac{(10-10.6724)^2}{10.6724} + \frac{(8-10.4434)^2}{10.4434} = 3.06$$

Justificación y decisión:
Como el 3.06 no es mayor de 7.815, no se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que el ajuste de los datos a una distribución normal es bueno.

TABLAS DE CONTINGENCIA

En muchas ocasiones, los *n* elementos de una muestra tomada de una población pueden clasificarse con dos criterios diferentes. Por tanto, es interesante saber si los dos métodos de clasificación son estadísticamente independientes. Supóngase que el primer método de clasificación tiene *r* niveles, y que el segundo tiene *c* niveles. O sea O_{ij} la frecuencia observada para el nivel *i* del primer método de clasificación y el nivel *j* del segúndo método de clasificación. En general, los datos aparecerán como se muestra en la siguiente tabla. Una tabla de este tipo usualmente se conoce como **tabla de contingencia r x c.**

Columnas

		1	**2**	**. . .**	**c**
Renglones	**1**	O_{11}	O_{12}	. . .	O_{1c}
	2	O_{21}	O_{22}	. . .	O_{2c}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	r	O_{r1}	O_{r2}	. . .	O_{rc}

El interés recae en probar la hipótesis de que los dos métodos de clasificación renglón-columna son independientes. Si se rechaza esta hipótesis, entonces se concluye que existe alguna interacción entre los dos criterios de clasificación. Los procedimientos de prueba exactos son difíciles de obtener, pero puede obtenerse un estadístico de prueba aproximado válido para *n* grande.

Sea p_{ij} la probabilidad de que un elemento seleccionado al azar caiga el la *ij*-ésima celda, dado que las dos clasificaciones son independientes. Entonces,

$p_{ij}=u_i v_j$, donde u_i es la probabilidad de que un elemento seleccionado al azar pertenezca al renglón de la clase *i*, y v_j es la probabilidad de que un elemento seleccionado pertenezca a la columna de la clase *j*. Ahora bien, si se supone independencia, los estimadores de u_i y v_j son:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} O_{ij}$$

$$\hat{v}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} O_{ij}$$

Por lo tanto, la frecuencia esperada de la celda es:

$$E_{ij} = n\hat{u}_i\hat{v}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} O_{ij}\sum_{i=1}^{r} O_{ij}$$

Entonces, para n grande, el estadístico

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

tiene una distribución aproximada ji-cuadrada con (r-1)(c-1) grados de libertad si la hipótesis nula es verdadera. Por consiguiente, la hipótesis de independencia debe rechazarse si el valor del estadístico de prueba X^2 calculado es mayor que X^2 crítico o de tabla.

Ejemplos:

1. Una asociación de profesores universitarios quiere determinar si la satisfacción en el trabajo es independiente del rango académico. Para ello realizó un estudio nacional entre los académicos universitarios y encontró los resultados mostrados son la tabla siguiente. Con α=0.05, haga una prueba para saber si son dependientes la satisfacción en el trabajo y el rango.

Rango

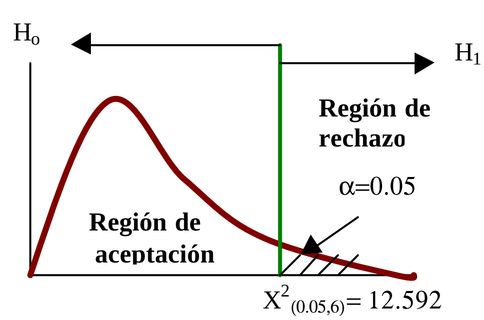
		Instructor	Profesor asistente	Profesor asociado	Profesor
Satisfacción en el trabajo	**Mucha**	40	60	52	63
	Regular	78	87	82	88
	Poca	57	63	66	64

Solución:

H_o; La satisfacción en el trabajo y el rango son independientes.

H_1; La satisfacción en el trabajo y el rango son dependientes.

Grados de libertad: (r-1)(c-1) = (3-1)(4-1)=(2)(3) = 6



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 12.592$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 12.592$ se rechaza H_o.

Se procederá a calcular los valores esperados de cada celda. Como los grados de libertad son 6, esto quiere decir que necesitamos calcular únicamente 6 frecuencias esperadas, y las faltantes se encuentran por diferencia.
Se calcularán los valores esperados E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22} y E_{23}.
Como se necesitan los totales de renglón y columna se mostrarán en la tabla:

Satisfacción en el trabajo	Rango:	Instructor	Profesor asistente	Profesor asociado	Profesor	Total
	Mucha	40	60	52	63	215
	Regular	78	87	82	88	335
	Poca	57	63	66	64	250
	Total	175	210	200	215	**800**

$$E_{ij} = n\hat{u}_i\hat{v}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} O_{ij}\sum_{i=1}^{r} O_{ij} = E_{11} = \frac{(215)(175)}{800} = 47.03$$

$$E_{12} = \frac{(215)(210)}{800} = 56.44 \qquad E_{13} = \frac{(215)(200)}{800} = 53.75 \qquad E_{21} = \frac{(335)(175)}{800} = 73.28$$

$$E_{22} = \frac{(335)(210)}{800} = 87.94 \qquad E_{23} = \frac{(335)(200)}{800} = 83.75$$

Rango

Satisfacción	Instructor	Profesor asistente	Profesor asociado	Profesor	Total
Mucha	40 (47.03)	60 (56.44)	52 (53.75)	63 (57.78)	215
Regular	78 (73.28)	87 (87.94)	82 (83.75)	88 (90.03)	335
Poca	57 (54.69)	63 (65.62)	66 (62.50)	64 (67.19)	250
Total	175	210	200	215	**800**

Los valores entre paréntesis son los esperados, los que no se calcularon por fórmula se obtuvieron por diferencia con respecto a los totales.

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(40-47.03)^2}{47.03} + \frac{(60-56.44)^2}{56.44} + \frac{(52-53.75)^2}{53.75} + \ldots + \frac{(64-67.19)^2}{67.19} = 2.75$$

Decisión y justificación:
Como el valor de 2.75 es menor que el de tabla 12.592, por lo tanto no se rechaza H_o y se concluye con un α=0.05 que la satisfacción en el trabajo y el rango son independientes.

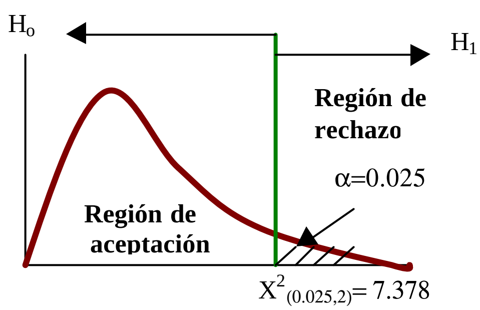
2. En un estudio de un taller, se reúne un conjunto de datos para determinar si la proporción de defectuosos producida por los trabajadores es la misma para el turno matutino, vespertino o nocturno. Se reunieron los siguientes datos:

	Turno		
	Matutino	**Vespertino**	**Nocturno**
Defectuosos	45	55	70
No defectuosos	905	890	870

Utilice un nivel de significancia de 0.025 para determinar si la proporción de defectuosos es la misma para los tres turnos.

Solución:
H_o; La proporción de artículos defectuosos es la misma para los tres turnos.
H_1; La proporción de artículos defectuosos no es la misma para los tres turnos.

Grados de libertad: (r-1)(c-1) = (2-1)(3-1)=(1)(2) = 2



Regla de decisión:
Si $X^2_R \leq 7.378$ no se rechaza H_o.
Si $X^2_R > 7.378$ se rechaza H_o.

Se procederá a calcular los valores esperados de cada celda. Como los grados de libertad son 2, esto quiere decir que necesitamos calcular únicamente 2 frecuencias esperadas, y las faltantes se encuentran por diferencia.
Se calcularán los valores esperados E_{11}, y E_{22}.
Como se necesitan los totales de renglón y columna se mostrarán en la tabla:

	Matutino	**Vespertino**	**Nocturno**	**Total**
Defectuosos	45	55	70	170
No defectuosos	905	890	870	2665

Total	950	945	940	**2835**

$$E_{ij} = n\hat{u}_i\hat{v}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} O_{ij} \sum_{i=1}^{r} O_{ij} = E_{11} = \frac{(170)(950)}{2835} = 57 \qquad E_{22} = \frac{(2665)(945)}{2835} = 888.33$$

	Matutino	Vespertino	Nocturno	Total
Defectuosos	45 (57.0)	55 (56.7)	70 (56.3)	170
No defectuosos	905 (893.0)	890 (888.3)	870 (883.7)	2665
Total	950	945	940	**2835**

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(45-57.0)^2}{57.0} + \frac{(55-56.7)^2}{56.7} + \frac{(70-56.3)^2}{56.3} + \ldots + \frac{(870-883.7)^2}{883.7} = 6.29$$

Decisión:
Si se busca este valor dentro de la tabla de ji-cuadrada con 2 grados de libertad nos dará un valor de P aproximado a 0.04. Si se observa el valor de la ji-cuadrada calculada de 6.29 con el valor de tabla de 7.378, se llega a la decisión de no rechazar H_0. Sin embargo sería riesgoso concluir que la proporción de defectuosos producidos es la misma para todos los turnos por tener un valor de P de 0.04.

Tablas de Contingencia para probar Homogeneidad
El uso de la tabla de contingencia de dos clasificaciones para probar independencia entre dos variables de clasificación en una muestra tomada de una población de interés, es sólo una de las aplicaciones de los métodos de tablas de contingencia. Otra situación común se presenta cuando existen *r* poblaciones de interés y cada una de ellas está dividida en las mismas *c* categorías. Luego se toma una muestra de la i-ésima población, y los conteos se introducen en las columnas apropiadas del i-ésimo renglón. En esta situación se desea investigar si las proporciones son o no las mimas en las *c* categorías de todas las poblaciones. La hipótesis nula de este problema establece que las poblaciones son ***homogéneas*** con respecto a las categorías (como el ejemplo pasado de los diferentes turnos), entonces la prueba de homogeneidad es en realidad una prueba sobre la igualdad de *r* parámetros binomiales. El cálculo de las frecuencias esperadas, la determinación de los grados de libertad y el cálculo de la estadística ji-cuadrada para la pruebe de homogeneidad son idénticos a los de la prueba de independencia.

ESTADISTICA NO PARAMETRICA

La mayor parte de los procedimientos de prueba de hipótesis que se presentan en las unidades anteriores se basan en la suposición de que las muestras aleatorias se seleccionan de poblaciones normales. Afortunadamente, la mayor parte de estas pruebas aún son confiables cuando experimentamos ligeras desviaciones de la normalidad, en particular cuando el tamaño de la muestra es grande. Tradicionalmente, estos procedimientos de prueba se denominan ***métodos paramétricos***. En esta sección se consideran varios procedimientos de prueba alternativos, llamados ***no paramétricos ó métodos de distribución libre***, que a menudo no suponen conocimiento de ninguna clase acerca de las distribuciones de las poblaciones fundamentales, excepto que éstas son continuas.

Los procedimientos no paramétricos o de distribución libre se usan con mayor frecuencia por los analistas de datos. Existen muchas aplicaciones en la ciencia y la ingeniería donde los datos se reportan no como valores de un continuo sino mas bien en una escala ordinal tal que es bastante natural asignar rangos a los datos.

Un ejemplo donde se aplica una prueba no paramétrica es el siguiente, dos jueces deben clasificar cinco marcas de cerveza de mucha demanda mediante la asignación de un grado de 1 a la marca que se considera que tiene la mejor calidad global, un grado 2 a la segunda mejor, etcétera. Se puede utilizar entonces una prueba no paramétrica para determinar donde existe algún acuerdo entre los dos jueces.

Se debe señalar que hay varias desventajas asociadas con las pruebas no paramétricas. En primer lugar, no utilizan la información que proporciona la muestra, y por ello una prueba no paramétrica será menos eficiente que el procedimiento paramétrico correspondiente, cuando se pueden aplicar ambos métodos. En consecuencia, para lograr la misma potencia, una prueba no paramétrica requerirá la correspondiente prueba no paramétrica.

Como se indicó antes, ligeras divergencias de la normalidad tienen como resultado desviaciones menores del ideal para las pruebas paramétricas estándar. Esto es cierto en particular para la prueba t y la prueba F. En el caso de la prueba t y la prueba F, el valor P citado puede ser ligeramente erróneo si existe una violación moderada de la suposición de normalidad.

En resumen, si se puede aplicar una prueba paramétrica y una no paramétrica al mismo conjunto de datos, debemos aplicar la técnica paramétrica más eficiente. Sin embargo, se debe reconocer que las suposiciones de normalidad a menudo no se pueden justificar, y que no siempre se tienen mediciones cuantitativas.

PRUEBA DEL SIGNO

La prueba del signo se utiliza para probar la hipótesis sobre la mediana $\tilde{m}$ de una distribución continua. La mediana de una distribución es un valor de la variable aleatoria X tal que la probabilidad de que un valor observado de X sea menor o igual, o mayor o igual, que la mediana es 0.5. Esto es, $P(X \leq \tilde{m}) = P(X \geq \tilde{m}) = 0.5$.

Puesto que la distribución normal es simétrica, la media de una distribución normal es igual a la mediana. Por consiguiente, la prueba del signo puede emplearse para probar hipótesis sobre la media de una población normal.

Suponga que las hipótesis son:

$$H_0; \tilde{m} = \tilde{m}_o$$
$$H_1; \tilde{m} < \tilde{m}_o$$

Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria tomada de la población de interés. Fórmense las diferencias

$$X_i - \tilde{m}_o, i = 1,2,\ldots n$$

Ahora bien si la hipótesis nula $H_0; \tilde{m} = \tilde{m}_o$ es verdadera, cualquier diferencia $X_i - \tilde{m}_o$ tiene la misma probabilidad de ser negativa o positiva. Un estadístico de prueba apropiado es el número de estas diferencias que son positivas, por ejemplo R^+. Por consiguiente, la prueba de la hipótesis nula es en realidad una prueba de que el número de signos positivos es un valor de una variable aleatoria binomial con parámetro P = ½. Puede calcularse un valor P para el número observado de signos positivos r^+ directamente de la distribución binomial. Al probar la hipótesis que se muestra al principio, se rechaza H_0 en favor de H_1 sólo si la proporción de signos positivos es suficientemente menor que ½ (o de manera equivalente, cada vez que el número observado de signos positivos r^+ es muy pequeño). Por tanto, si el valor P calculado

$$P = P(R^+ \leq r^+ \text{ cuando } p = 1/2)$$

es menor o igual que algún nivel de significancia seleccionado previamente, entonces se rechaza H_0 y se concluye que H_1 es verdadera.

Para probar la otra hipótesis unilateral

$$H_0; \tilde{m} = \tilde{m}_o$$
$$H_1; \tilde{m} > \tilde{m}_o$$

se rechaza H_0 en favor de H_1 sólo si el número observado de signos más, r^+, es grande o, de manera equivalente, cada vez que la fracción observada de signos positivos es significativamente mayor que ½. En consecuencia, si el valor P calculado $P = P(R^+ \geq r^+$ cuando $p = 1/2)$ es menor que α, entonces H_0 se rechaza y se concluye que H_1 es verdadera.

También puede probarse la alternativa bilateral. Si las hipótesis son:

$$H_0; \tilde{m} = \tilde{m}_o$$
$$H_1; \tilde{m} \neq \tilde{m}_o$$

se rechaza H_0 si la proporción de signos positivos difiere de manera significativa de ½ (ya se por encima o por debajo). Esto es equivalente a que el número observado de signos r^+ sea suficientemente grande o suficientemente pequeño. Por tanto, si $r^+ > n/2$ el valor P es

$$P = 2P(R^+ \leq r^+ \text{ cuando } p = ½)$$

Y si $r^+ > n/2$ el valor P es

$$P = 2P(R^+ \geq r^+ \text{ cuando } p = ½)$$

Si el valor P es menor que algún nivel preseleccionado α, entonces se rechaza H_0 y se concluye que H_1 es verdadera.

Ejemplos:

1. Un artículo informa cerca de un estudio en el que se modela el motor de un cohete reuniendo el combustible y la mezcla de encendido dentro de un contenedor metálico. Una característica importante es la resistencia al esfuerzo cortante de la unión entre los dos tipos de sustancias. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos al probar 20 motores seleccionados al azar. Se desea probar la hipótesis de que la mediana de la resistencia al esfuerzo cortante es 2000 psi, utilizando $\alpha = 0.05$.

Solución:

Se mostrará la tabla del ejercicio y es función del investigador poner los signos con respecto a la mediana.

$$H_0; \hat{m} = 2000\, psi$$
$$H_1; \hat{m} \neq 2000\, psi$$

Observación	**Resistencia al esfuerzo cortante x_i**	**Signo de la diferencia x_i-2000**	**Observación**	**Resistencia al esfuerzo cortante x_i**	**Signo de la diferencia x_i-2000**
1	2158.70	+	11	2165.20	+
2	1678.15	-	12	2399.55	+
3	2316.00	+	13	1779.80	-
4	2061.30	+	14	2336.75	+
5	2207.50	+	15	1765.30	-
6	1708.30	-	16	2053.50	+
7	1784.70	-	17	2414.40	+
8	2575.10	+	18	2200.50	+
9	2357.90	+	19	2654.20	+
10	2256.70	+	20	1753.70	-

De la tabla se puede observar que el estadístico de prueba $r^+ = 14$.

Regla de decisión:

Si el valor de P correspondiente a r^+=14 es menor o igual que α =0.05 se rechaza H_0.

Cálculos:
Puesto que r^+=14 es mayor que n/2=20/2=10, el valor de P se calcula de

$$P=2P(R^+ \geq 14 \text{ cuando } p = ½)$$

La P se calcula con la fórmula de la distribución binomial:

$$P = 2\sum_{r=14}^{20} {}_{20}C_r (0.5)^r (0.5)^{20-r} = 0.1153$$

Conclusión:
Como P=0.1153 no es menor que α=0.05, no es posible rechazar la hipótesis nula de que la mediana de la resistencia al esfuerzo constante es 2000 psi.

Otra manera de resolver el problema es con Aproximación normal:
Cuando p=0.5, la distribución binomial esta bien aproximada por la distribución normal cuando *n* es al menos 10. Por tanto, dado que la media de la distribución binomial es *np* y la varianza es *npq*, la distribución de R^+ es aproximadamente normal con media 0.5*n* y varianza 0.25*n*, cada vez que *n* es moderadamente grande. Por consiguiente las hipótesis pueden probarse con el estadístico:

$$Z = \frac{r^+ - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}$$

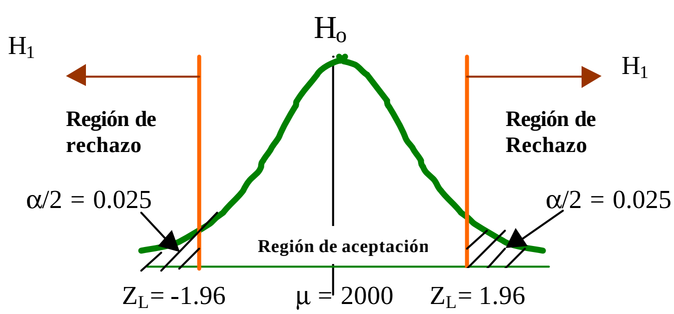
Las reglas de decisión se establecerán como cualquier ensayo en una distribución muestral en donde se utiliza la distribución normal.

Para resolver el problema anterior:

$H_0 ; \hat{m} = 2000\, psi$

$H_1 ; \hat{m} \neq 2000\, psi$

Como la es mayor que 10 se utilizará la aproximación normal.



Regla de Decisión:
Si $-1.96 \leq Z_R \leq 1.96$ No se rechaza H_o
Si $Z_R < -1.96$ ó si $Z_R > 1.96$ Se rechaza H_o

Cálculos:

$$Z = \frac{r^+ - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} = \frac{14 - (0.5)(20)}{0.5\sqrt{20}} = 1.789$$

Decisión y Conclusión:

Como 1.789 esta entre –1.96 y 1.96, no se rechaza H_0 y se concluye con un α=0.05 que la mediana es de 2000 psi.

Prueba del Signo para Muestras Pareadas

También se puede utilizar la prueba de signo para probar la hipótesis nula $\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 = d_0$ para observaciones pareadas. Aquí se reemplaza cada diferencia, d_i, con un signo más o menos dependiendo si la diferencia ajustada, d_i-d_0, es positiva o negativa. A lo largo de esta sección suponemos que las poblaciones son simétricas. Sin embargo, aun si las poblaciones son asimétricas se puede llevar a cabo el mismo procedimiento de prueba, pero las hipótesis se refieren a las medianas poblacionales en lugar de las medias.

Ejemplo:

1. Una compañía de taxis trata de decidir si el uso de llantas radiales en lugar de llantas regulares con cinturón mejora la economía de combustible. Se equipan 16 automóviles con llantas radiales y se manejan por un recorrido de prueba establecido. Sin cambiar de conductores, se equipan los mismos autos con llantas regulares con cinturón y se manejan una vez más por el recorrido de prueba. Se registra el consumo de gasolina, en kilómetros por litro, de la siguiente manera:

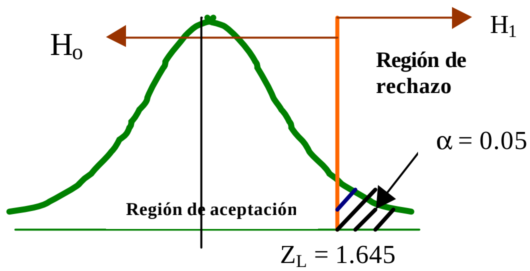
Automóvil	Llantas radiales	Llantas con cinturón
1	4.2	4.1
2	4.7	4.9
3	6.6	6.2
4	7.0	6.9
5	6.7	6.8
6	4.5	4.4
7	5.7	5.7
8	6.0	5.8
9	7.4	6.9
10	4.9	4.9
11	6.1	6.0
12	5.2	4.9
13	5.7	5.3
14	6.9	6.5
15	6.8	7.1
16	4.9	4.8

¿Se puede concluir en el nivel de significancia de 0.05 que los autos equipados con llantas radiales obtienen mejores economías de combustible que los equipados con llantas regulares con cinturón?

Solución:

$H_0 ; \tilde{m}_R - \tilde{m}_C = 0$

$H_1; \tilde{m}_R - \tilde{m}_C > 0$



Regla de decisión:
Si $z_R \leq 1.645$ no se rechaza H_o.
Si $z_R > 1.645$ se rechaza H_o.

Se procede ha realizar las diferencias entre de los kilómetros por litro entre llantas radiales y con cinturón:

Automóvil	Llantas radiales	Llantas con cinturón	d
1	4.2	4.1	+
2	4.7	4.9	-
3	6.6	6.2	+
4	7.0	6.9	+
5	6.7	6.8	-
6	4.5	4.4	+
7	5.7	5.7	0
8	6.0	5.8	+
9	7.4	6.9	+
10	4.9	4.9	0
11	6.1	6.0	+
12	5.2	4.9	+
13	5.7	5.3	+
14	6.9	6.5	+
15	6.8	7.1	-
16	4.9	4.8	+

Al observar las diferencias se ve que sólo existe una n=14, ya que se descartan los valores de cero. Se tiene $r^+ = 11$

$$Z = \frac{r^+ - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} = \frac{11 - (0.5)(14)}{0.5\sqrt{14}} = 2.14$$

Decisión y conclusión:
Como 2.14 es mayor a 1.645 se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que las llantas radiales mejoran la economía de combustible.

PRUEBA DE RANGO CON SIGNO DE WILCOXON

Se puede notar que la prueba de signo utiliza sólo los signos más y menos de las diferencias entre las observaciones y μ_0 en el caso de una muestra, o los signos más y menos de las diferencias entro los pares de observaciones en el caso de la muestra pareada, pero no toma en consideración la magnitud de estas diferencias. Una prueba que utiliza dirección y magnitud, propuesta en

1945 por Frank Wilcoxon, se llama ahora comúnmente **prueba de rango con signo de Wilcoxon.** Esta prueba se aplica en el caso de una distribución continua simétrica. Bajo esta condición se puede probar la hipótesis nula $\mu=\mu_0$. Primero se resta μ_0 de cada valor muestral y se descarta todas las diferencias iguales a cero. Se asigna un rango de 1 a la diferencia absoluta más pequeña, un rango de 2 a la siguiente más pequeña, y así sucesivamente. Cuando el valor absoluto de dos o más diferencias es el mismo, se asigna a cada uno el promedio de los rangos que se asignarían si las diferencias se distinguieran. Por ejemplo, si la quinta y sexta diferencia son iguales en valor absoluto, a cada una se le asignaría un rango de 5.5. Si la hipótesis $\mu=\mu_0$ es verdadera, el total de los rangos que corresponden a las diferencias positivas debe ser casi igual al total de los rangos que corresponden a las diferencias negativas. Se representan esos totales como w_+ y w_-, respectivamente. Se designa el menor de w_+ y w_- con w.

Al seleccionar muestras repetidas esperaríamos que variarían w_+ y w_-, y por tanto w. De esta manera se puede considerar a w_+ y w_-, y w como valores de las correspondiente variables aleatorias W_+, W_-, y W. La hipótesis nula $\mu=\mu_0$ se puede rechazar a favor de la alternativa $\mu<\mu_0$ sólo si w_+ es pequeña y w_- es grande. Del mismo modo, la alternativa $\mu>\mu_0$ se puede aceptar sólo si w_+ es grande y w_- es pequeña. Para una alternativa bilateral se puede rechazar H_0 a favor de H_1 si w_+ o w_- y por tanto w son suficientemente pequeñas. No importa cuál hipótesis alternativa puede ser, rechazar la hipótesis nula cuando el valor de la estadística apropiada W_+, W_-, o W es suficientemente pequeño.

Dos Muestras con Observaciones Pareadas

Para probar la hipótesis nula de que se muestrean dos poblaciones simétricas continuas con $\mu_1=\mu_2$ para el caso de una muestra pareada, se clasifican las diferencias de las observaciones paradas sin importar el signo y se procede como en el caso de una muestra. Los diversos procedimientos de prueba para los casos de una sola muestra y de una muestra pareada se resumen en la siguiente tabla:

Para probar H_0	**Contra H_1**	**Calcular**
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	w_+
	$\mu > \mu_0$	w_-
	$\mu \neq \mu_0$	w
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	w_+
	$\mu_1 > \mu_2$	w_-
	$\mu_1 \neq \mu_2$	w

No es difícil mostrar que siempre que n<5 y el nivel de significancia no exceda 0.05 para una prueba de una cola ó 0.10 para una prueba de dos colas, todos los valores posibles de w_+, w_- o w conducirán a la aceptación de la hipótesis nula. Sin embargo, cuando $5 \leq n \leq 30$, la tabla A.16 muestra valores críticos aproximados de W_+ y W_- para niveles de significancia iguales a 0.01, 0.025 y 0.05 para una prueba de una cola, y valores críticos de W para niveles de significancia iguales a 0.02, 0.05 y 0.10 para una prueba de dos colas. La hipótesis nula se rechaza si el valor calculado w_+, w_-, o w **es menor o igual que** el valor de tabla apropiado. Por ejemplo, cuando n=12 la tabla A.16 muestra que se requiere un valor de $w_+ \leq 17$ para que la alternativa unilateral $\mu < \mu_0$ sea significativa en el nivel 0.05.

Ejemplos:

1. Los siguientes datos representan el número de horas que un compensador opera antes de requerir una recarga: 1.5, 2.2, 0.9, 1.3, 2.0, 1.6, 1.8, 1.5, 2.0, 1.2 y 1.7. Utilice la prueba de rango con signo para probar la hipótesis en el nivel de significancia de 0.05 que este compensador particular opera con una media de 1.8 horas antes de requerir una recarga.

Solución:

H_0; $\mu = 1.8$

H_1; $\mu \neq 1.8$

Se procederá a efectuar las diferencias y a poner rango con signo a los datos.

Dato	**d_i = dato - 1.8**	**Rangos**
1.5	-0.3	**5.5**
2.2	0.4	**7**
0.9	-0.9	**10**
1.3	-0.5	**8**
2.0	0.2	**3**
1.6	-0.2	**3**
1.8	0	**Se anula**
1.5	-0.3	**5.5**
2.0	0.2	**3**
1.2	-0.6	**9**
1.7	-0.1	**1**

Regla de decisión:

Para una n = 10, después de descartar la medición que es igual a 1.8, la tabla A.16 muestra que la región crítica es $w \leq 8$.

Cálculos:

$w_+ = 7 + 3 + 3 = 13$

$w_- = 5.5 + 10 + 8 + 3 + 5.5 + 9 + 1 = 42$

por lo que $w = 13$ (menor entre w_+ y w_-).

Decisión y Conclusión:

Como 13 no es menor que 8, no se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que el tiempo promedio de operación no es significativamente diferente de 1.8 horas.

2. Se afirma que un estudiante universitario de último año puede aumentar su calificación en el área del campo de especialidad del examen de registro de graduados en al menos 50 puntos si de antemano se le proporcionan problemas de muestra. Para probar esta afirmación, se dividen 20 estudiantes del último año en 10 pares de modo que cada par tenga casi el mismo promedio de puntos de calidad general en sus primeros años en la universidad. Los problemas y respuestas de muestra se proporcionan al azar a un miembro de cada par una semana antes del examen. Se registran las siguientes calificaciones del examen:

Par	**Con problemas de muestra**	**Sin problemas de muestra**
1	531	509
2	621	540
3	663	688
4	579	502
5	451	424
6	660	683
7	591	568
8	719	748
9	543	530
10	575	524

Pruebe la hipótesis nula en el nivel de significancia de 0.05 de que los problemas aumentan las calificaciones en 50 puntos contra la hipótesis alternativa de que el aumento es menor a 50 puntos.

Solución:
La prueba de rango con signo también se puede utilizar para probar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = d_0$. En este caso las poblaciones no necesitan ser simétricas. Como con la prueba de signo, se resta d_0 de cada diferencia, se clasifican las diferencias ajustadas sin importar el signo y se aplica el mismo procedimiento.

En este caso $d_0 = 50$, por lo que se procede a calcular las diferencias entre las muestras y luego restarles el valor de 50. Se representara con μ_1 y μ_2 la calificación media de todos los estudiantes que resuelven el examen en cuestión con y sin problemas de muestra, respectivamente.

H_0; $\mu_1 - \mu_2 = 50$
H_1; $\mu_1 - \mu_2 < 50$

Regla de decisión:
Para n=10 la tabla muestra que la región crítica es $w_+ \leq 11$.

Cálculos:

Par	Con problemas de muestra	Sin problemas de muestra	d_i	$d_i - d_0$	Rangos
1	531	509	22	-28	**5**
2	621	540	81	31	**6**
3	663	688	-25	-75	**9**
4	579	502	77	27	**3.5**
5	451	424	27	-23	**2**
6	660	683	-23	-73	**8**
7	591	568	23	-27	**3.5**
8	719	748	-29	-79	**10**
9	543	530	13	-37	**7**
10	575	524	51	1	**1**

$w_+ = 6 + 3.5 + 1 = 10.5$

Decisión y Conclusión:
Como 10.5 es menor que 11 se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que los problemas de muestra, en promedio, no aumentan las calificaciones de registro de graduados en 50 puntos.

Aproximación Normal para Muestras Grandes

Cuando $n \geq 15$, la distribución muestral de W_+ ó W_- se aproxima a la distribución normal con media $m_w = \frac{n(n+4)}{4}$ y varianza $s_w^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.
Por tanto, cuando *n* excede el valor más grande en la tabla A.16, se puede utilizar la estadística

$$z = \frac{w_+ - m_w}{s_w}$$

para determinar la región crítica de la prueba.

Ejercicios para la Unidad IV

1. Se lanza 180 veces un dado con los siguientes resultados:

X	1	2	3	4	5	6
f	28	36	36	30	27	23

¿Es un dado balanceado? Utilice un $\alpha = 0.01$.

2. Se supone que una máquina mezcla cacahuates, avellanas, anacardos y pacanas a razón de 5:2:2:1. Se encuentra que una lata que contiene 500 de estas nueces mezcladas tiene 269 cacahuates, 112 avellanas, 74 anacardos y 45 pacanas. Al nivel de significancia de 0.05 pruebe la hipótesis de que la máquina mezcla las nueces a razón de 5:2:2:1.

3. Se seleccionan tres canicas de una urna que contiene cinco canicas rojas y tres verdes. Después de registrar el número *x* de canicas rojas, las canicas

se reemplazan en la urna y el experimento se repite 112 veces. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

x	0	1	2	3
f	1	31	55	25

Pruebe la hipótesis con un nivel de significancia de 0.05, de que los datos registrados se pueden ajustar a una distribución hipergeométrica.

4. Se lanza una moneda hasta que sale cara y se registra el número de lanzamientos x. Después de repetir el experimento 256 veces, se obtuvieron los siguientes resultados:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
f	136	60	34	12	9	1	3	1

Pruebe la hipótesis con un nivel de significancia de 0.05 de que la distribución observada de x se puede ajustar por una distribución geométrica g(x;1/2), x = 1, 2, 3, …

5. Con los siguientes datos, pruebe la bondad de ajuste entre las frecuencias de clase que se observan y las frecuencias esperadas correspondientes de una distribución normal con $\mu = 65$ y $\sigma = 21$, utilice un nivel de significancia de 0.05.

Límite de clase	**Frecuencia**
10 - 19	3
20 – 29	2
30 – 39	3
40 – 49	4
50 – 59	5
60 – 69	11
70 – 79	14
80 – 89	14
90 - 99	4

6. En un experimento para estudiar la dependencia de la hipertensión de los hábitos de fumar, se tomaron los siguientes datos de 180 individuos:

	No fumadores	**Fumadores moderados**	**Fumadores empedernidos**
Con hipertensión	21	36	30
Sin hipertensión	48	26	19

Pruebe la hipótesis de que la presencia o ausencia de hipertensión es independiente de los hábitos de fumar. Utilice un nivel de significancia de 0.05.

7. Una muestra aleatoria de 200 hombres casados, todos retirados, se clasifica de acuerdo con la educación y el número de hijos:

	Número de hijos		
Educación	**0 - 1**	**2 - 3**	**Más de 3**
Elemental	14	37	32
Secundaria	19	42	17
Universidad	12	17	10

Pruebe la hipótesis, con un nivel de significancia de 0.05, de que el tamaño de la familia es independiente del nivel de instrucción del padre.

8. Se comparan dos tipos de instrumentos para medir la cantidad de monóxido de azufre en la atmósfera en un experimento de contaminación atmosférica. Se registraron las siguientes lecturas diarias en un período de dos semanas:

Día	Instrumento A	Instrumento B
1	0.96	0.87
2	0.82	0.74
3	0.75	0.63
4	0.61	0.55
5	0.89	0.76
6	0.64	0.70
7	0.81	0.69
8	0.68	0.57
9	0.65	0.53
10	0.84	0.88
11	0.59	0.51
12	0.94	0.79
13	0.91	0.84
14	0.77	0.63

Con el uso de la aproximación normal a la distribución binomial, realice una prueba de signo para determinar si los diferentes instrumentos conducen a diferentes resultados. Utilice un nivel de significancia de 0.05.

9. Los siguientes datos representan el tiempo, en minutos, que un paciente tiene que esperar durante 12 visitas al consultorio de una doctora antes de ser atendido por ésta:

17	15	20	20
32	28	12	26
25	25	35	24

Utilice la prueba de rango con signo al nivel de significancia de 0.05 para probar la afirmación de la doctora de que la media del tiempo de espera para sus pacientes no es mayor que 20 minutos antes de entrar al consultorio.

10. Los pesos de cuatro personas antes de que dejan de fumar y cinco semanas después de dejar de fumar, en kilogramos, son los siguientes:

Individuo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Antes	66	80	69	52	75
Después	71	82	68	56	73

Utilice la prueba de rango con signo para observaciones pareadas para probar la hipótesis, en el nivel de significancia de 0.05, de que dejar de fumar no tiene efecto en el peso de una persona contra la alternativa del que el peso aumenta si deja de fumar.

11. Los siguientes son los números de recetas surtidas por dos farmacias en un período de 20 días:

Día	Farmacia A	Farmacia B
1	19	17
2	21	15
3	15	12
4	17	12
5	24	16
6	12	15
7	19	11
8	14	13
9	20	14
10	18	21
11	23	19
12	21	15
13	17	11
14	12	10
15	16	20
16	15	12
17	20	13
18	18	17
19	14	16
20	22	18

Utilice la prueba de rango con signo al nivel de significancia de 0.01 para determinar si las dos farmacias, en promedio, surten el mismo número de recetas contra la alternativa de que la farmacia A surte más recetas que la farmacia B.

12. Se afirma que una nueva dieta reducirá el peso de una persona 4.5 kilogramos, en promedio, en un período de dos semanas. Se registran los pesos de 10 mujeres que siguen esta dieta antes y después de un período de dos semanas, y se obtienen los siguientes datos:

Mujer	Peso antes	Peso después
1	58.5	60.0
2	60.3	54.9
3	61.7	58.1
4	69.0	62.1
5	64.0	58.5
6	62.6	59.9
7	56.7	54.4
8	63.6	60.2
9	68.2	62.3
10	59.4	58.7

Utilice la prueba de rango con signo al nivel de significancia de 0.05 para probar la hipótesis de que la dieta reduce la mediana del peso en 4.5

kilogramos contra la hipótesis alternativa de que la mediana de la diferencia en pesos es menor que 4.5 kilogramos.

13. Se toman 10 muestras de un baño de cultivo sobre placa utilizado en un proceso de fabricación de componentes electrónicos, y se mide el pH del baño. Los valores de pH medidos son 7.91, 7.85, 6.82, 8.01, 7.46, 6.95, 7.05, 7.35, 7.25, 7.42. Los ingenieros creen que el valor de la mediana del pH es 7.0. ¿ La muestra indica que esta proposición es correcta? Utilice la prueba del signo con $\alpha = 0.05$ para investigar esta hipótesis. Encuentre el valor P de esta prueba.

14. Se mide de manera rutinaria el nivel de impurezas (en ppm) en un producto químico intermedio. En una prueba reciente se observan los datos siguientes:

2.4	2.5	1.7	1.6	1.9	2.6	1.3	1.9	2.0	2.5	2.6
2.3	2.0	1.8	1.3	1.7	2.0	1.9	2.3	1.9	2.4	1.6

¿Puede afirmarse que la mediana del nivel de impureza es menor que 2.5 ppm? Establezca y pruebe la hipótesis apropiada utilizando la prueba de signo con $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

Respuestas a los Ejercicios de la Unidad IV

1. Región crítica $X^2 > 15.086$, $X^2 = 4.47$ por lo tanto no rechazar H_0, el dado está balanceado.
2. Región crítica $X^2 > 7.815$, $X^2 = 10.14$, rechazar H_0. Las nueces no están mezcladas en la proporción 5:2:2:1.
3. Región crítica $X^2 > 5.991$, $X^2 = 1.67$, no rechazar H_0. Los datos se ajustan a una distribución hipergeométrica.
4. Región crítica $X^2 > 11.07$, $X^2 = 2.57$, no rechazar H_0. Los datos se ajustan a una distribución geométrica.
5. Región crítica $X^2 > 12.592$, $X^2 = 12.78$, rechazar H_0. Los datos no se ajustan a una distribución normal.
6. Región crítica $X^2 > 5.991$, $X^2 = 14.6$, rechazar H_0. La presencia o ausencia de hipertensión y hábitos de fumar no son independientes.
7. Región crítica $X^2 > 9.488$, $X^2 = 7.54$, no rechazar H_0. El tamaño de la familia es independiente del nivel se educación del padre.
8. Región crítica $-1.96 \leq z \leq 1.96$, $z= 2.67$, rechazar H_0.
9. Región crítica $w_- \leq 11$ para una n=10, $w_- = 12.5$, no rechazar H_0.
10. Región crítica $w_+ \leq 1$ para n = 5, $w_+ = 3.5$, no rechazar H_0.
11. Región crítica z>2.575. z= 2.80, rechazar H_0, la farmacia A surte más recetas que la farmacia B.
12. Región crítica $w_+ \leq 11$ para una n = 10. $w_+ = 17.5$, no rechazar H_0.
13. $2P(R^+ \geq 8 / p = 0.5) = 0.109$, como no es menor a 0.05, no se rechaza H_0.
14. H_0; $\tilde{m} = 2.5$ H_1; $\tilde{m} < 2.5$ $P(R^+ \leq 2 / p = 0.5) = 0.0002$, se rechaza H_0.

Bibliografía

Devore, J.L. (2000). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, Quinta Edición, Thomson Learning.

Mendenhall, W. (1998). Estadística para Administradores, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica.

Montgomery, D.C. y Runger G.C. (1996). Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería, Primera Edición, Mc Graw Hill.

Sheaffer, R. L. y McClave, J.T. (1990). Probabilidad y Estadística para Ingeniería, Primera Edición, Grupo Editorial Iberoamérica.

Spiegel, M.R. (1970). Estadística, Primera Edición, Serie Schaum, Mc Graw Hill.

Walpole, R. E., Myers, R.H., y Myers, S.L. (1998). Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Sexta Edición, Prentice Hall.

Weimer, R.C. (1996). Estadística, Segunda Edición, CECSA.